

Volume Rendering Digest (for NeRF)

Andrea Tagliasacchi^{1,2} Ben Mildenhall¹

¹Google Research ²Simon Fraser University

电光幻影炼金术提供翻译解读

神经辐射场 [3] 采用简单的体渲染作为一种方法，通过利用可见性的概率概念来使得通过射线-三角形交叉点变得可微分。这是通过假设场景由一团发光粒子组成的来实现的，这些粒子的密度在空间中发生变化（在基于物理的渲染的术语中，这将被描述为具有吸收和发射但没有散射的体积 [4, Sec 11.1]）。在下文中，为了说明简单，并且不失一般性，我们假设发射的光不作为观察方向的函数而改变。本技术报告是之前报告的精简版 [1, 2]，不过是在 NeRF 的上下文中重写的，采用了它常用的符号¹

透射率. 设密度场为 $\sigma(\mathbf{x})$ ，其中 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ 表示射线撞击粒子的微分似然度（即在行进无穷小的距离时撞击粒子的概率）。我们重新参数化沿给定射线 $\mathbf{r}=(\mathbf{o}, \mathbf{d})$ 的密度作为标量函数 $\sigma(t)$ ，因为沿射线的任何点 \mathbf{x} 都可以写成 $\mathbf{r}(t)=\mathbf{o}+t\mathbf{d}$ 。密度与透射率函数 $\mathcal{T}(t)$ 密切相关，它表示光线在区间 $[0, t)$ 上传播而没有击中任何粒子的概率。那么当走差分步 dt 时没有撞击粒子的概率 $\mathcal{T}(t+dt)$ 等于 $\mathcal{T}(t)$ ，即射线到达 t 的可能性，乘以 $(1 - dt \cdot \sigma(t))$ ，在该步骤中没有击中任何东西的概率：

$$\mathcal{T}(t + dt) = \mathcal{T}(t) \cdot (1 - dt \cdot \sigma(t)) \quad (1)$$

$$\frac{\mathcal{T}(t + dt) - \mathcal{T}(t)}{dt} \equiv \mathcal{T}'(t) = -\mathcal{T}(t) \cdot \sigma(t) \quad (2)$$

这是一个经典的微分方程，可以如下求解：

$$\mathcal{T}'(t) = -\mathcal{T}(t) \cdot \sigma(t) \quad (3)$$

$$\frac{\mathcal{T}'(t)}{\mathcal{T}(t)} = -\sigma(t) \quad (4)$$

$$\int_a^b \frac{\mathcal{T}'(t)}{\mathcal{T}(t)} dt = - \int_a^b \sigma(t) dt \quad (5)$$

$$\log \mathcal{T}(t)|_a^b = - \int_a^b \sigma(t) dt \quad (6)$$

$$\mathcal{T}(a \rightarrow b) \equiv \frac{\mathcal{T}(b)}{\mathcal{T}(a)} = \exp \left(- \int_a^b \sigma(t) dt \right) \quad (7)$$

其中我们将 $\mathcal{T}(a \rightarrow b)$ 定义为光线从距离 a 到 b 而没有碰到粒子的概率，这与前面的符号 $\mathcal{T}(t) = \mathcal{T}(0 \rightarrow t)$ 。

¹如果有兴趣借用 LaTeX 的符号，请参考：<https://www.overleaf.com/read/fkhpkzxhnyws>

概率解释. 请注意, 我们也可以将函数 $1 - \mathcal{T}(t)$ (通常称为 不透明度) 解释为累积分布函数 (CDF), 表示射线确实在某个时间之前到达距离 t 并击中粒子的概率。那么 $\mathcal{T}(t) \cdot \sigma(t)$ 是相应的概率密度函数 (PDF), 给出了射线在距离 t 处正好停止的可能性。

体积渲染. 我们现在可以计算当光线从 $t=0$ 传播到 D 时体积中的粒子发出的光的预期值, 合成在背景颜色之上。由于在 t 处停止的概率密度为 $\mathcal{T}(t) \cdot \sigma(t)$, 因此预期颜色为

$$\mathbf{C} = \int_0^D \mathcal{T}(t) \cdot \sigma(t) \cdot \mathbf{c}(t) dt + \mathcal{T}(D) \cdot \mathbf{c}_{\text{bg}} \quad (8)$$

其中 \mathbf{c}_{bg} 是根据残差透射率 $\mathcal{T}(D)$ 与前景场景合成的背景色。不失一般性, 我们在下文中省略了背景术语。

同质媒体. 我们可以通过积分计算一些具有恒定颜色 \mathbf{c}_a 和密度 σ_a 在射线段 $[a, b]$ 上的均匀体积介质的颜色:

$$\mathbf{C}(a \rightarrow b) = \int_a^b \mathcal{T}(a \rightarrow t) \cdot \sigma(t) \cdot \mathbf{c}(t) dt \quad (9)$$

$$= \sigma_a \cdot \mathbf{c}_a \int_a^b \mathcal{T}(a \rightarrow t) dt \quad \text{constant density/radiance} \quad (10)$$

$$= \sigma_a \cdot \mathbf{c}_a \int_a^b \exp\left(-\int_a^t \sigma(u) du\right) dt \quad \text{substituting (7)} \quad (11)$$

$$= \sigma_a \cdot \mathbf{c}_a \int_a^b \exp\left(-\sigma_a u \Big|_a^t\right) dt \quad \text{constant density (again)} \quad (12)$$

$$= \sigma_a \cdot \mathbf{c}_a \int_a^b \exp(-\sigma_a(t-a)) dt \quad (13)$$

$$= \sigma_a \cdot \mathbf{c}_a \cdot \frac{\exp(-\sigma_a(t-a))}{-\sigma_a} \Big|_a^b \quad (14)$$

$$= \mathbf{c}_a \cdot (1 - \exp(-\sigma_a(b-a))) \quad (15)$$

透射率是乘法. 请注意, 透射率分解如下:

$$\mathcal{T}(a \rightarrow c) = \exp\left(-\left[\int_a^b \sigma(t) dt + \int_b^c \sigma(t) dt\right]\right) \quad (16)$$

$$= \exp\left(-\int_a^b \sigma(t) dt\right) \exp\left(-\int_b^c \sigma(t) dt\right) \quad (17)$$

$$= \mathcal{T}(a \rightarrow b) \cdot \mathcal{T}(b \rightarrow c) \quad (18)$$

这也来自 \mathcal{T} 的概率解释, 因为射线没有击中 $[a, c]$ 内的任何粒子的概率是它没有击中任何粒子的两个独立事件的概率的乘积在 $[a, b]$ 或 $[b, c]$ 内。

分段常数数据的透射率. 给定一组区间 $\{[t_n, t_{n+1}]\}_{n=1}^N$, 在第 n 段内具有恒定密度 σ_n , 并且 $t_1=0$ 和 $\delta_n=t_{n+1}-t_n$, 透射率等于:

$$\mathcal{T}_n = \mathcal{T}(t_n) = \mathcal{T}(0 \rightarrow t_n) = \exp\left(-\int_0^{t_n} \sigma(t) dt\right) = \exp\left(\sum_{k=1}^{n-1} -\sigma_k \delta_k\right) \quad (19)$$

分段常数数据的体积渲染. 结合以上, 我们可以通过具有分段常数颜色和密度的介质来评估体绘制积分:

$$\mathbf{C}(t_{N+1}) = \sum_{n=1}^N \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathcal{T}(t) \cdot \sigma_n \cdot \mathbf{c}_n dt \quad \text{分段守恒} \quad (20)$$

$$= \sum_{n=1}^N \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathcal{T}(0 \rightarrow t_n) \cdot \mathcal{T}(t_n \rightarrow t) \cdot \sigma_n \cdot \mathbf{c}_n dt \quad \text{from (18)} \quad (21)$$

$$= \sum_{n=1}^N \mathcal{T}(0 \rightarrow t_n) \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathcal{T}(t_n \rightarrow t) \cdot \sigma_n \cdot \mathbf{c}_n dt \quad \text{常数} \quad (22)$$

$$= \sum_{n=1}^N \mathcal{T}(0 \rightarrow t_n) \cdot (1 - \exp(-\sigma_n(t_{n+1} - t_n))) \cdot \mathbf{c}_n \quad \text{from (15)} \quad (23)$$

这导致来自 NeRF [3, Eq.3] 的体绘制方程:

$$\mathbf{C}(t_{N+1}) = \sum_{n=1}^N \mathcal{T}_n \cdot (1 - \exp(-\sigma_n \delta_n)) \cdot \mathbf{c}_n, \quad \text{where} \quad \mathcal{T}_n = \exp\left(\sum_{k=1}^{n-1} -\sigma_k \delta_k\right) \quad (24)$$

最后, 我们可以用 alpha 合成权重 $\alpha_n \equiv 1 - \exp(-\sigma_n \delta_n)$ 来重新表达它们, 而不是用体积密度来写这些表达式, 并注意到 $\prod_i \exp x_i = \exp(\sum_i x_i)$ in (19):

$$\mathbf{C}(t_{N+1}) = \sum_{n=1}^N \mathcal{T}_n \cdot \alpha_n \cdot \mathbf{c}_n, \quad \text{where} \quad \mathcal{T}_n = \prod_{n=1}^{N-1} (1 - \alpha_n) \quad (25)$$

替代推导. 通过利用 CDF 和 PDF 之间较早的连接 $(1 - \mathcal{T})' = \mathcal{T}\sigma$, 并假设沿区间 $[a, b]$ 的恒定颜色 \mathbf{c}_a :

$$\int_a^b \mathcal{T}(t) \cdot \sigma(t) \cdot \mathbf{c}(t) dt = \mathbf{c}_a \int_a^b (1 - \mathcal{T})'(t) dt \quad (26)$$

$$= \mathbf{c}_a \cdot (1 - \mathcal{T}(t))|_a^b \quad (27)$$

$$= \mathbf{c}_a \cdot (\mathcal{T}(a) - \mathcal{T}(b)) \quad (28)$$

$$= \mathbf{c}_a \cdot \mathcal{T}(a) \cdot (1 - \mathcal{T}(a \rightarrow b)) \quad (29)$$

结合恒定的每间隔密度, 该恒等式产生与 (24) 相同的表达式.

参考文献

- [1] Nelson Max and Min Chen. Local and global illumination in the volume rendering integral. Technical report, Lawrence Livermore National Lab (LLNL), Livermore, CA (United States), 2005.
- [2] Nelson Max and Min Chen. Local and global illumination in the volume rendering integral. Technical report, Schloss Dagstuhl, Leibniz Center for Informatics (Germany), 2010. <https://drops.dagstuhl.de/opus/volltexte/2010/2709/pdf/18.pdf>.

- [3] Ben Mildenhall, Pratul P. Srinivasan, Matthew Tancik, Jonathan T. Barron, Ravi Ramamoorthi, and Ren Ng. NeRF: Representing scenes as neural radiance fields for view synthesis. In *ECCV*, 2020.
- [4] Matt Pharr, Wenzel Jakob, and Greg Humphreys. *Physically based rendering: From theory to implementation*. Morgan Kaufmann, 2016. https://pbr-book.org/3ed-2018/Volume_Scattering/Volume_Scattering_Processes.

Acknowledgements

Thanks to Daniel Rebain, Soroosh Yazdani and Rif A. Saurous for a careful proofread.