F5 Crible d'Eratosthène (25+5 points)

L'algorithme d'Eratosthène trouve les nombres premiers inférieurs ou égaux à n par élimination. Il s'agit de marquer tous les multiples $2k, 3k, \ldots$ pour tous les valeurs entières $k = 2, 3, \ldots$, dans l'ordre croissant.

CRIBLE D'ERATOSTHÈNE

1. créer liste pour les entiers $2, 3, \ldots, n$ pour pouvoir les marquer ; au début, tous les entiers sont non-marqués
2. boucler sur $k = 2, 3, 4, \ldots, n$
   si k est non-marqué, alors annoncer q'il est un nombre premier
   marquer $2k, 3k, 4k, \ldots, \lfloor n/k \rfloor \cdot k$

i. Algorithme (10 points) ▶ Donnez le pseudo-code pour un algorithme sieve(n) qui performe les calculs esquissés ci-dessus. Utilisez un tableau booléen pour stocker les marques pour les entiers.

ii. Temps de calcul (10 points) ▶ Démontrez que le temps de calcul de sieve(n) est $\Theta(n \log n)$. (Les opérations arithmétiques s'exécutent en $O(1)$.)

iii. Coût amorti (5 points) Le Théorème de nombres premiers (TNP) caractérise la croissance du nombre $\pi(n)$ de nombres premiers inférieurs ou égaux à n :

$$\pi(n) \sim \frac{n}{\ln n} \qquad \{n \to \infty\} \tag{F2}$$

▶ Caractérisez la croissance asymptotique du temps amorti (par nombre premier) de sieve(n).

iv. Améliorations (5 points boni) ▶ Démontrez qu'il suffit de marquer les multiples de k en Ligne 2 tandis que $k^2 \leq n$. Analysez comment l'accélération impliée (que l'on exécute la boucle intérieure pour $k = 2, 3, \ldots, \lfloor \sqrt{n} \rfloor$)

FIG. 4: Eratosthène de Cyrène (276–194 av. J.-C.)

	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	4	$\boxed{5}$	6	$\boxed{7}$
~~8~~	9	~~10~~	11	~~12~~	13	~~14~~
~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~	~~21~~
~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~
29	~~30~~	31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~
~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~	41	~~42~~
43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~

TAB. 2: Entiers marqués par sieve(49) après la boucle sur les multiples de $k = 7$. L'algorithme a déjà trouvé les nombres premiers encadrés.

FIG. 5: Jacques Hadamard (1865–1963) et Charles Jean de la Vallée-Poussin (1866–1962) ont démontré le TNP sous la forme de (F2) en 1896.