IFT 2121 Hiver 2000 **Pierre McKenzie**
Introduction à l'algorithmique

EXAMEN INTRA

18 février 2000, 8:30–10:20, salle AA-1360 du pavillon Aisenstadt

Directives:

- Aucune documentation n'est permise. *No documentation.*
- Répondez sur le questionnaire. *Answer on the question sheets.*
- La traduction anglaise de quelques questions est donnée en dernière page de cet examen. Cette dernière page ne sera pas considérée dans la correction.
  The English translation of a few selected questions appears on the last page of the exam. Do not write your answers on that last page, which will be discarded.

1. _______ /10
2. _______ /20
3. _______ /20
4. _______ /25
5. _______ /25

Total: _______ /100

Nom: ______________________________ **Code permanent:** ______________

Votre place dans la salle 1360 ***(your seat number in room 1360)*:** ______________

1. **(10 points)** La construction du tableau 8×8 de permutations de $\{1, \dots 8\}$ servant à calculer le nombre de permutations engendrées par un ensemble de permutations donné nécessite le tamisage du produit de chaque paire de permutations provenant du tableau. Au cours de cette construction du tableau, soit g_3 tirée de la ligne 3 du tableau et g_5 tirée de la ligne 5.

   (a) (3 pts) Encerclez le produit qu'il est <u>inutile</u> de tamiser: $g_3 * g_5$ $g_5 * g_3$.

   (b) (7 pts) Justifiez votre réponse.

2. **(20 points)** Soit $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$.

   (a) (5 pts) Donnez la définition formelle complète de $O(f(n))$:

(b) (5 pts) Est-il vrai que $O(n^3) \subseteq \Omega(n^2)$? (Justifiez pour mériter vos points.)

(c) (5 pts) Comment se comparent $O(n^{\lg n})$ et $O((\lg n)^n)$? (Justifiez.)

(d) (5 pts) Le temps en pire cas d'un algorithme A est dans $O(n)$ et celui d'un algorithme B est dans $O(n^2)$. Est-il nécessairement vrai que pour tout n suffisamment grand il existe un exemplaire de taille n sur lequel A est plus rapide que B? (Justifiez pour mériter vos points.)

3. **(20 points)**
(12 pts) Résolvez exactement la récurrence par la méthode de l'équation caractéristique:

$$t_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ 3 & \text{si } n = 1 \\ t_{n-1} + t_{n-2} + 2 & n \geq 2. \end{cases}$$

(8 pts) Sans justifier, donnez l'ordre exact de $T(n)$:

Si $T(n) \in 8T(\lceil n/2 \rceil) + \Theta(n^2)$, alors $T(n) \in \Theta($ $)$.

Si $T(n) \in 6T(\lceil n/2 \rceil) + \Theta(n^2)$, alors $T(n) \in \Theta($ $)$.

Si $T(n) \in 4T(\lceil n/2 \rceil) + \Theta(n^2)$, alors $T(n) \in \Theta($ $)$.

Si $T(n) \in 2T(\lceil n/2 \rceil) + \Theta(n^2)$, alors $T(n) \in \Theta($ $)$.

4. **(25 points)**
(8 pts) Un ensemble de candidats disponibles est l'un des éléments présents lorsqu'un problème est résolu par la technique dite vorace. Donnez avec brève explication quatre autres éléments qui sont habituellement présents.

(13 pts) Pour calculer un arbre sous-tendant minimal d'un graphe connexe non orienté de a arêtes de longueur non négative et de n sommets, *Prim* choisit itérativement de nouvelles arêtes rejoignant l'unique arbre non trivial en construction, et fonctionne en $O(n^2)$, alors que *Kruskal* fonctionne en $O(a \log n)$. Proposez une implantation de la stratégie de *Prim* qui fonctionne elle aussi en un temps dans $O(a \log n)$ lorsque le graphe est fourni sous forme de listes d'adjacence.

(4 pts) Pourquoi votre implantation se contente-t-elle en effet de $O(a \log n)$?

5. **(25 points)** Considérez

```
fonction biz(n)
si (0 ≤ n < 2) alors retourner n
sinon retourner biz(⌊n/2⌋) × biz(⌊n/4⌋).
```

(a) (4 pts) Décrivez explicitement la fonction $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ calculée par *biz*.

(b) (6 pts) Prouvez formellement que la fonction f que vous avez donnée en (a) vérifie bien $f(n) = biz(n)$ pour tout $n \geq 0$.

(c) (5 pts) Donnez la récurrence précise décrivant le temps d'exécution $T(n)$ de la fonction $biz(n)$, en supposant que l'exécution complète des deux lignes formant la définition de *biz* requiert chacune une unité de temps (excluant les appels récursifs):

(d) (5 pts) Un oracle vous révèle que $T(n) \in \Theta(\ g(n) \mid n$ est puissance de $2\ )$, où $g(n)$ est non décroissante et 2-harmonieuse. Pouvez-vous conclure que $T(n) \in \Theta(g(n))$? (Justifiez en prouvant vos dires.)

(e) (5 pts) Inventez-vous oracle, et donnez une fonction explicite simple $g(n)$ qui vérifie les conditions de (d):

BONNE CHANCE!

1) Constructing the 8×8 table of permutations of $\{1, \ldots 8\}$ in the algorithm used to compute the order of a permutation group ultimately requires sifting the product of each pair of permutations appearing in the table. Suppose that this construction process comes across a permutation g_3 drawn from line 3 and a permutation g_5 drawn from line 5 in the table.
1a) Circle the product which actually does not require sifting.
1b) Justify your answer.

2d) Algorithms A and B have worst case times in $O(n)$ and $O(n^2)$ respectively. Is it necessarily true that for each sufficiently large n, there is an instance of size n on which A runs faster than B? (Justify.)

4a) A set of candidates is an ingredient present when a problem gets solved using the greedy strategy. With brief explanations, give four other ingredients which are usually present as well.
4b) We have studied two algorithms computing a minimal spanning tree of an undirected connected graph having a edges of nonnegative weight and n nodes. Prim *picks at each iteration a new edge dangling from the unique nontrivial tree under construction and operates in $O(n^2)$.* Kruskal *operates in $O(a \log n)$ time.*
Implement the Prim *idea and achieve time $O(a \log n)$, when the graph is provided as adjacency lists.*
4c) Justify your $O(a \log n)$ bound.

5a) Give an explicit description of the function computed by biz.
5b) Prove your claim formally.
5c) Assume that each of the two lines defining the biz function can be performed in unit time (excluding the recursive calls). Give the precise recurrence expressing the computing time $T(n)$ of the biz function.
5d) An oracle reveals to you that $T(n) \in \Theta(\ g(n) \mid n \text{ is a power of } 2\ )$, where $g(n)$ is nondecreasing and 2-harmonious. Can you conclude $T(n) \in \Theta(g(n))$? (Justify.)
5e) Turn youself into an oracle, and give an explicit and simple function $g(n)$ verifying the conditions of (5d).

GOOD LUCK!