Introduction à l'algorithmique **Automne 2017**

IFT2125-6001 TA: Stéphanie Larocque

Démonstration 2

À partir des corrigés de Maelle Zimmermann

1

Question: Soit $0 < \epsilon < 1$. Utiliser les relations $\subset$ et $=$ afin d'ordonner les O des fonctions suivantes et démontrer la solution (en utilisant si nécessaires les théorèmes sur les limites, voir démonstration 1).

$$n \log n \quad n^8 \quad n^{1+\epsilon} \quad (1+\epsilon)^n \quad n^2/\log n \quad (n^2-n+1)^4$$

Solution: La solution est

$$O(n \log n) \subset O(n^{1+\epsilon}) \subset O(n^2/\log n) \subset O(n^8) = O((n^2-n+1)^4) \subset O((1+\epsilon)^n)$$

On peut démontrer chaque inclusion point par point en utilisant les théorèmes vus sur les limites et la règle de L'Hôpital.

(a)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{1+\epsilon}}{n \log n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\epsilon}}{\log n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\epsilon n^{\epsilon-1}}{1/n} = \underbrace{\lim_{n\to\infty} \epsilon n^{\epsilon} = +\infty}_{\text{car } \epsilon>0}.$$

(b)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2/\log n}{n^{1+\epsilon}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{1-\epsilon}}{\log n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1-\epsilon)n^{-\epsilon}}{1/n} = \underbrace{\lim_{n\to\infty} (1-\epsilon)n^{1-\epsilon} = +\infty}_{\text{car } 1-\epsilon>0}.$$

(c)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^8}{n^2/\log n} = \lim_{n\to\infty} n^6 \log n = +\infty.$$

(d) Ici à la place d'utiliser le calcul de limites qui nécessiterait d'appliquer de nombreuses fois la règle de l'Hôpital, on peut utiliser la définition de $O(f(n))$.

$$\begin{aligned}
(n^2 - n + 1)^4 &= n^8 - 4n^7 + 10n^6 - 16n^5 + 19n^4 - 16n^3 + 10n^2 - 4n + 1 \\
&\leq n^8 + 10n^6 + 19n^4 + 10n^2 + 1 \\
&\leq n^8 + 10n^8 + 19n^8 + 10n^8 + n^8 \\
&= 41n^8.
\end{aligned}$$

Ainsi par définition $(n^2 - n + 1)^4 \in O(n^8)$. De plus,

$$\begin{aligned}
(n^2 - n + 1)^4 &= n^8 - 4n^7 + 10n^6 - 16n^5 + 19n^4 - 16n^3 + 10n^2 - 4n + 1 \\
&\geq n^8 - (4n^7 + 16n^5 + 16n^3 + 4n) \\
&\geq n^8 - 40n^7 \\
&\geq n^8 - (1/2)n^8 \quad \text{car } 80n^7 \leq n^8 \quad \forall n \geq 80 \\
&= (1/2)n^8
\end{aligned}$$

Ainsi $n^8 \leq 2(n^2 - n + 1)^4$ $\forall n \geq n_0 = 80$, et donc $n^8 \in O((n^2 - n + 1)^4)$.

Une autre façon de le voir serait ainsi:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{(n^2 - n + 1)^4}{n^8} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n^2(1 - n/n^2 + 1/n^2))^4}{n^8} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^8(1 - n/n^2 + 1/n^2)^4}{n^8} \\
&= \lim_{n\to\infty} (1 - n/n^2 + 1/n^2)^4 = \lim_{n\to\infty} (1 - 1/n + 1/n^2)^4 = 1 \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Et donc on aurait $\Theta(n^8) = \Theta((n^2 - n + 1)^4)$ car la limite $\in \mathbb{R}$.

(e) Posons $b = 1 + \epsilon$.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{b^n}{n^8} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln b \cdot b^n}{8n^7} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(\ln b)^2 \cdot b^n}{8 \cdot 7n^6} \\
&= \ldots \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(\ln b)^8 \cdot b^n}{8!} \\
&= +\infty
\end{aligned}$$

2

Question: Soit $0 < \epsilon < 1$. Utiliser les relations $\subset$ et $=$ afin d'ordonner les O des fonctions suivantes et démontrer la solution (en utilisant si nécessaires les théorèmes sur les limites, voir démonstration 1).

$$n! \quad (n+1)! \quad 2^n \quad 2^{n+1} \quad 2^{2n} \quad n^n \quad n^{\sqrt{n}} \quad n^{\log n}$$

Solution: La solution est

$$O(n^{\log n}) \subset O(n^{\sqrt{n}}) \subset O(2^n) = O(2^{n+1}) \subset O(2^{2n}) \subset O(n!) \subset O((n+1)!) \subset O(n^n)$$

A parté: Il est utile de montrer pour commencer que $\forall d, c \in \mathbb{R}^{>0},\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0,\ c(\log n) \leq n^d$. En effet, $\forall d, c \in \mathbb{R}^{>0}$ nous avons:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c \log n}{n^d} = \lim_{n\to\infty} \frac{c/n}{dn^{d-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{c}{dn^d} = 0.$$

Nous pouvons en conclure (par la définition rigoureuse d'une limite) que

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0,\ \frac{c \log n}{n^d} < \epsilon.$$

En prenant $\epsilon = 1$ on a démontré l'assertion.

On démontre ensuite chaque inclusion point par point comme dans l'exercice précédent.

(a) Nous avons prouvé que $(\forall d, c \in \mathbb{R}^{>0})\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0,\ c(\log n) \leq n^d$. Ainsi pour n suffisamment grand, on peut borner $\log n$ par $\frac{1}{2}\sqrt{n}$:

$$0 \leq \frac{n^{\log n}}{n^{\sqrt{n}}} \leq \frac{n^{\frac{1}{2}\sqrt{n}}}{n^{\sqrt{n}}} = \frac{1}{n^{\frac{1}{2}\sqrt{n}}}$$

Comme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}\sqrt{n}}} = 0$$

on obtient que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{\log n}}{n^{\sqrt{n}}} = 0$$

(b) Pour n suffisamment grand:

$$\begin{aligned} n^{\sqrt{n}} &= 2^{\sqrt{n}\log_2 n} \\ &= 2^{c\sqrt{n}\log n} && \text{car } \log_2 n = \log n / \log 2 \\ &\leq 2^{n^{\frac{3}{4}}} && \text{car } c\log n \leq n^{1/4} \text{ pour } n \text{ suff. grand} \end{aligned}$$

Ainsi pour n suffisamment grand:

$$0 \leq \frac{n^{\sqrt{n}}}{2^n} \leq \frac{2^{n^{\frac{3}{4}}}}{2^n} = \frac{2^{n^{\frac{3}{4}}}}{2^{n^{\frac{3}{4}}n^{\frac{1}{4}}}} = \frac{1}{2^{n^{\frac{3}{4}}(n^{\frac{1}{4}}-1)}}$$

Comme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{n^{\frac{3}{4}}(n^{\frac{1}{4}}-1)}} = 0$$

on obtient que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{\sqrt{n}}}{2^n} = 0.$$

Une autre façon de résoudre cette inclusion sans utiliser la propriété prouvée plus haut serait d'utiliser les propriétés suivantes: $x = \exp(\ln(x))$, $\ln(x^c) = c\ln(x)$ et $\ln(x) \leq \sqrt{x}$. On a donc:

$$\begin{aligned} 0 \leq \frac{n^{\sqrt{n}}}{2^n} &= \exp(\ln(\frac{n^{\sqrt{n}}}{2^n})) = \exp(\sqrt{n}\ln(n) - n\ln(2)) \\ &\leq \exp(\sqrt{n}\sqrt{n} - n\ln(2)) = \exp(n(1-\ln(2))) \end{aligned}$$

Comme

$$\lim_{n\to\infty} \exp(n(1-\ln(2))) = 0$$

on obtient que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{\sqrt{n}}}{2^n} = 0.$$

(c) Nous l'avons prouvé lors de la démonstration 1.

(d)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4^n}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{4}{2}\right)^n = \lim_{n\to\infty} 2^n = +\infty.$$

(e) Pour $n \geq 4$, nous avons

$$\frac{n!}{4^n} = \frac{n \cdot n-1 \ldots 2 \cdot 1}{4 \cdot 4 \ldots 4 \cdot 4} \geq \frac{n}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{4}$$

car $k/4 \geq 1$ pour $4 \leq k \leq n$. Comme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{4} = +\infty,$$

on obtient

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{4^n} = +\infty.$$

(f)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\cdot n\cdot (n-1)\dots 2\cdot 1}{n\cdot (n-1)\dots 2\cdot 1} = \lim_{n\to\infty} n+1 = +\infty.$$

(g) Nous avons
$$\frac{n^n}{(n+1)!} = \frac{n}{2}\cdot\frac{n}{3}\cdots\frac{n}{n+1} \geq \frac{n}{4}$$
car $n/k \geq 1$ pour $3 \leq k \leq n$ et $n/(n+1) \geq 1/2$. Comme
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{4} = +\infty$$
on obtient
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)!} = +\infty$$

3

Question: Donner explicitement avec preuve deux fonctions $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ telles que $f \notin O(g)$ et $g \notin O(f)$.

Note. La solution donnée en TP (avec $f(n) = 0$ lorsque n est impair et $g(n) = 0$ lorsque n est pair) est un autre exemple valide.

Solution: Soient
$$f(n) = \begin{cases} n & \text{si } n \text{ est pair} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad g(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ n & \text{sinon} \end{cases}$$

Supposons que $f \in O(g(n))$. Alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}, c \in \mathbb{R}^{>0}$ tels que $f(n) \leq cg(n)$, $\forall n \geq n_0$. Soit $k = 2\max(n_0, \lceil c\rceil)$. Alors comme k est pair
$$f(k) = k = 2\max(n_0, \lceil c\rceil) > c = cg(k).$$
Ceci est une contradiction car $k \geq n_0$. Nous concluons que $f \notin O(g)$.

De façon symétrique, on peut prouver que $g \notin O(f)$.

4

Question: Exécuter l'algorithme intelligent de permutations pour déterminer si (1345) appartient à l'ensemble de permutations généré par $\{(12), (12345)\}$. Justifier le temps d'exécution de cet algorithme.

Voir fichier python/notebook pour l'implémentation en python et notes de cours pour le pseudocode.

Le temps d'exécution de l'algorithme intelligent des permutations est $O(m^6)$, où m est la taille des permuations.

Tamiser une permutation prend $O(m^2)$, car il y aura, en pire cas, $O(m)$ collisions (car on descend d'une ligne au moins à chaque collision), et traiter chaque collision prend $O(m)$ opérations, qui correspondent à calculer l'inverse ($O(m)$) + effectuer le produit des 2 permutations ($O(m)$ aussi).

L'algorithme effectuera en pire cas $O(m^4)$ tamisages. Puisque le tableau est de taille m^2, bien qu'on ne remplisse que la partie supérieure du tableau, on a tout de même $O(m^2)$ cases à (possiblement) remplir et considérer. Puisqu'on doit effectuer le produit de toutes les paires de permutations dans le tableau, et ayant $O(m^2)$ permutations dans ce tableau, on aura en pire cas $O(m^4)$ produits de permutations à tamiser (chacune des permutations présentes dans le tableau avec chacune des autres permutations présentes).

Finalement, puisqu'on effectuera en pire cas $O(m^4)$ tamisages, et que chaque tamisage s'effectue en pire cas en $O(m^2)$, alors cet algorithme s'effectue en $O(m^6)$.