

# Resolução das Questões Discursivas dos ENADEs

BRIAN MAYER

26 de fevereiro de 2018

## Resumo

Neste documento serão resolvidas as questões discursivas das provas de matemática a níveis de licenciatura e bacharelado do ENADE (Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes) aplicadas pelo SINAES (Sistema Nacional de Avaliação da Educação Superior) dos anos de 1998 até 2014, a última prova aplicada até o presente para o interesse geral no desenvolvimento e treinamento matemático empregado neste trabalho. Os textos das questões não foram modificados, apenas rescritos e reformatados devido ao *software* utilizado neste documento, i.e.  $\text{\LaTeX} 2_{\epsilon}$ . As soluções contidas neste documento são resultados da mistura entre a criatividade do autor e de uma pesquisa de *internet*.

# Sumário

<b>I</b>	<b>Considerações Iniciais</b>	<b>2</b>
<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Comentários Gerais</b>	<b>5</b>
<b>II</b>	<b>Provas</b>	<b>6</b>
<b>3</b>	<b>ENADE 1998</b>	<b>7</b>
3.1	Questões . . . . .	7
3.1.1	Questão 1 . . . . .	7
3.1.2	Questão 2 . . . . .	7
3.1.3	Questão 3 . . . . .	8
3.1.4	Questão 4 . . . . .	8
3.1.5	Questão 5 . . . . .	8
3.2	Soluções . . . . .	8
3.2.1	Questão 1 . . . . .	8
3.2.2	Questão 2 . . . . .	9
3.2.3	Questão 3 . . . . .	9
3.2.4	Questão 4 . . . . .	9
<b>4</b>	<b>ENADE 1999</b>	<b>10</b>
4.1	Questões . . . . .	10
4.1.1	Questão 1 . . . . .	10
4.1.2	Questão 2 . . . . .	10
4.1.3	Questão 3 . . . . .	11

4.1.4	Questão 4	11
4.1.5	Questão 5	11
4.2	Soluções	12
4.2.1	Questão 1	12
4.2.2	Questão 2	12
<b>5</b>	<b>ENADE 2000</b>	<b>13</b>
5.1	Questões	13
5.1.1	Questão 1	13
5.1.2	Questão 2	13
5.1.3	Questão 3	13
5.1.4	Questão 4	14
5.2	Soluções	14
5.2.1	Questão 2	14
<b>6</b>	<b>ENADE 2001</b>	<b>15</b>
6.1	Questões	15
6.1.1	Questão 1	15
6.1.2	Questão 2	15
6.1.3	Questão 3	15
6.1.4	Questão 4	16
6.1.5	Questão 5	16
6.2	Soluções	16
6.2.1	Questão 2	16
6.2.2	Questão 3	16
<b>7</b>	<b>ENADE 2002</b>	<b>17</b>
7.1	Questões	17
7.1.1	Questão 1	17
7.1.2	Questão 2	17
7.1.3	Questão 3	18
7.1.4	Questão 4	18
7.1.5	Questão 5	18
7.1.6	Questão 6	19
7.2	Soluções	19
7.2.1	Questão 1	19
7.2.2	Questão 5	20

<b>8</b>	<b>ENADE 2003</b>	<b>21</b>
8.1	Questões . . . . .	21
8.1.1	Questão 1 . . . . .	21
8.1.2	Questão 2 . . . . .	21
8.1.3	Questão 3 . . . . .	22
8.1.4	Questão 4 . . . . .	22
8.1.5	Questão 5 . . . . .	22
8.1.6	Questão 6 . . . . .	23
8.2	Soluções . . . . .	23
8.2.1	Questão 1 . . . . .	23
8.2.2	Questão 2 . . . . .	24
8.2.3	Questão 4 . . . . .	24
<b>9</b>	<b>ENADE 2005</b>	<b>25</b>
9.1	Questões . . . . .	25
9.1.1	Questão 1 . . . . .	25
9.2	Soluções . . . . .	25
9.2.1	Questão 1 . . . . .	25
<b>10</b>	<b>ENADE 2008</b>	<b>27</b>
10.1	Questões . . . . .	27
10.1.1	Questão 1 . . . . .	27
10.2	Soluções . . . . .	27
10.2.1	Questão 1 . . . . .	27
<b>11</b>	<b>ENADE 2011</b>	<b>29</b>
11.1	Questões . . . . .	29
11.1.1	Questão 1 . . . . .	29
11.1.2	Questão 2 . . . . .	29
11.1.3	Questão 3 . . . . .	30
11.2	Soluções . . . . .	30
11.2.1	Questão 1 . . . . .	30
11.2.2	Questão 2 . . . . .	31
11.2.3	Questão 3 . . . . .	31

<b>12 ENADE 2014</b>	<b>33</b>
12.1 Questões . . . . .	33
12.1.1 Questão 1 . . . . .	33
12.1.2 Questão 2 . . . . .	33
12.1.3 Questão 3 . . . . .	34
12.1.4 Questão 4 . . . . .	35
12.1.5 Questão 5 . . . . .	36
12.2 Soluções . . . . .	36

## Parte I

# Considerações Iniciais

# Capítulo 1

## Introdução

Começando com o ENADE de 1998 que possui cinco (5) questões discursivas, aborda os temas de cálculo de áreas, soluções de equações diferenciais, demonstrações a respeito de convergência de sequências, integrais complexas e operações com anéis e corpos. No ENADE de 1999 temos cinco (5) questões, a primeira fazendo uma aplicação de equações diferenciais no crescimento de uma população, e pedindo uma solução analítica para a mesma, outra questão na área de cálculo pede o valor de uma integral complexa em uma curva muito conhecida pela matemática, as demais perguntas são de álgebra e análise, onde os problemas de álgebra se concentraram no tópico de polinômios, na análise são abordados sequências, funções e campos vetoriais. O ENADE do ano 2000 possui quatro (4) questões centradas nos tópicos mais comumente estudados: integrais complexas, a equação de Laplace, convergência de séries e matrizes. Muito centralizado no quesito mecânico na solução dos problemas. O do ano 2001 trás cinco (5) questões, a maioria na área de álgebra, com tábuas de elementos de corpos, pergunta sobre algumas definições de espaços métricos e sobre funções, possui uma questão de aplicação de cálculo diferencial -na área de taxas de variação e volume- e uma questão sobre a exponencial complexa. No ENADE do ano de 2002 encontram-se seis (6) questões discursivas, abrangendo a maioria dos tópicos principais da Matemática, tais como, cálculo diferencial e integral, pedindo operações com derivadas, série de potências -com o teste da razão- e a solução de uma integral complexa, álgebra, aritmética, e geometria analítica e vetores. O ENADE do ano de 2003 possui também seis (6) questões, onde se deve escolher cinco (5) e resolvê-las, mas aqui estarão todas resolvidas, a primeira questão é de cálculo, onde se pede a resolução de uma integral dupla, as segunda, terceira e quarta questões, na área de álgebra, pedem construções de anéis, operações com matrizes e polinômios, a quinta questão novamente sobre cálculo, desta vez, aborda campos vetoriais e necessita de manipulações a respeito dos divergente, convergente e laplaciano, encerrando com conjecturas sobre sequências na sexta questão. No provão do ENADE 2005 a única questão aborda o tema de Cálculo, onde se deve verificar as condições



de *Cauchy-Riemann* e realizar a solução de uma integral complexa. O ENADE 2008 apresenta apenas uma (1) questão sobre o tema de Análise Matemática, no que se diz respeito à diferenciação e propriedades de certas famílias de funções, tais como injetora e limitada. O ENADE 2011 contém três (3) questões: a primeira questão aborda o tema de Estatística, i.e. no cálculo de probabilidades, a segunda sequência, utilizando indução finita para demonstrar uma conjectura e a terceira questão abrange a área de Análise Matemática, onde primeiramente apresenta o *teorema do valor intermediário* e *a posteriori* o aplica nesse campo para resolver uma situação-problema na Corrida de São Silvestre de 2010. As três (3) questões do ENADE de 2014 abordam os temas de geometria analítica, matemática aplicada e equações Diofantinas, a primeira questão é sobre os efeitos visuais de uma transformação da computação gráfica, a segunda questão aborda o sistema de correção de palavras de editores de texto com álgebra, e a terceira pede para aplicar equações diofantinas a um problema do cotidiano.

Num panorama geral percebemos o alto nível de matemática, não só na parte discursiva, as questões necessitam de muita análise e conhecimento sobre os principais teoremas dos assuntos abordados, tais como o teorema de *Green*,  $\int_{\partial R} Mdx + Ndy = \iint_R \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dxdy$  para o cálculo de áreas em algumas questões e o teorema de *Cauchy* para a resolução das integrais complexas do tipo  $\int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz$  -presentes em todos os provões-, o teorema de *Cayley-Hamilton* para os processos envolvendo diagonalização e autovalores e autovetores, entre outras competências. Em todos os anos as questões abrangeram a maior parte da ementa de um curso de bacharelado, cumprindo com o objetivo da prova.

## Capítulo 2

### Comentários Gerais

**Parte II**

**Provas**

## Capítulo 3

# ENADE 1998

### 3.1 Questões

#### 3.1.1 Questão 1

Seja  $R$  uma região do plano que satisfaz as condições do Teorema de Green.

- (a) Mostre que a área de  $R$  é dada por  $\frac{1}{2} \int_{\partial R} xdy - ydx$
- (b) Use o item (a) para calcular a área da elipse de equações  $\{ x = a \cos(\theta)$   
 $y = b \sin(\theta)$  onde  $a > 0$  e  $b > 0$  são fixos, e  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  (valor: 20,0 pontos)

**Dados/Informações adicionais:** Teorema de Green: Seja  $R$  uma região do plano com interior não vazio e cuja fronteira  $\partial R$  é formada por um número finito de curvas fechadas, simples, disjuntas e de classe  $C^1$  por partes. Sejam

$L(x, y)$  e  $M(x, y)$  funções de classe  $C^1$  em  $R$ . Então  $\iint_R \left( \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} \right) dx dy =$   
 $\int_{\partial R} Ldx + Mdy$

#### 3.1.2 Questão 2

Resolva a equação diferencial  $y''' - 4y'' + 4y' = e^x$ , onde  $y' = \frac{dy}{dx}$ ;  $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$ ;  
 $y''' = \frac{d^3y}{dx^3}$  (valor: 20,0 pontos)

### 3.1.3 Questão 3

Prove que se uma seqüência de funções  $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}$  converge uniformemente para  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  e cada  $f_n$  é contínua no ponto  $a \in D$ , então  $f$  é contínua no ponto  $a$ .

**Dados/Informações adicionais:** Uma seqüência de funções  $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}$  converge uniformemente para  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  se para todo  $\epsilon > 0$  dado existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $n > n_0 \implies |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$  para todo  $x \in D$ . (valor: 20,0 pontos)

### 3.1.4 Questão 4

Seja  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$  a curva  $\gamma(\theta) = e^{i\theta}$ . Calcule  $\int_{\gamma} \frac{1}{z - z_0} dz$  nos seguintes casos:

(a)  $z_0 = \frac{1}{2}(1 + i)$

(b)  $z_0 = 2(1 + i)$ . (valor: 20,0 pontos)

### 3.1.5 Questão 5

Sejam  $\alpha$  um número algébrico de grau  $n$  e  $\beta = b_0 + b_1\alpha + \dots + b_{n-1}\alpha^{n-1}$  um elemento não nulo no corpo  $\mathbb{Q}(\alpha)$ , i.e., os coeficientes  $b_i$  são racionais,  $0 \leq i \leq n-1$ , e, pelo menos, um deles é diferente de zero.

(a) Prove que  $\frac{1}{\beta}$  é um polinômio em  $\alpha$ .

(a) Racionalize a fração  $\frac{1}{2 + \sqrt[3]{2}}$ . (valor: 20,0 pontos)

## 3.2 Soluções

### 3.2.1 Questão 1

- (a) A integral dada no enunciado nos fornece  $L(x, y) = -y$  e  $M(x, y) = x$ . Calculando  $\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}$  obtemos: 2. Como foi dito que a função satisfaz as condições do Teorema de Green, então a integral  $\frac{1}{2} \int_{\partial R} x dy - y dx = \frac{1}{2} \iint_R 2 dx dy = \iint_R dx dy$ , que corresponde à área da região  $R$ .

- (b) Temos então  $\frac{1}{2} \int_{\partial R} x dy - y dx = \frac{1}{2} \int_{\partial R} a \cos(\theta) dy - b \sin(\theta) dx$ . Mas  $dy = b \cos(\theta) d\theta$  e  $dx = -a \sin(\theta) d\theta$ , então a integral se torna:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\partial R} a \cos(\theta) b \cos(\theta) d\theta - b \sin(\theta) (-a \sin(\theta)) d\theta = \\ & = \frac{ab}{2} \int_{\partial R} \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) d\theta = \frac{ab}{2} \int_0^{2\pi} d\theta = ab\pi \end{aligned}$$

### 3.2.2 Questão 2

Fazendo a substituição:  $u(x) = y'(x)$  a equação diferencial assume a forma  $u'' - 4u' + 4u = e^x$ . A solução da equação característica é:  $\lambda = 2$ , portanto a solução da equação homogênea associada é  $u(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$ .

Pela equação não homogênea, uma aparente solução é  $u(x) = e^x$ . De fato:  $e^x - 4e^x + 4e^x = e^x$ , portanto pelo princípio da sobreposição uma solução da equação diferencial é  $u(x) = c_0 e^x + c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$ . Mas  $u = y'$ , então

$$y(x) = \int u(x) dx = \int c_0 e^x + c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} dx$$

Portanto a solução da eq. diferencial é  $y(x) = C_0 e^x + C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + C_3$ .

### 3.2.3 Questão 3

Como a sequência de funções converge para  $f$ , então dado  $\epsilon > 0$  existe  $n_o \in \mathbb{N}$  tal que para  $n > n_o$ ,  $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ . Mas cada  $f_n$  é contínua no ponto  $a$ , ou seja, para  $\delta > 0$ ,  $|x - a| < \delta$  implica que  $|f_n(x) - f_n(a)| < \epsilon$ . Como  $f_n(x)$  converge para  $f(x)$  então  $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ , portanto  $f$  é contínua em  $a$ .

### 3.2.4 Questão 4

A curva em questão é a circunferência de raio 1, então:

- (a) Como  $z_0 = \frac{1}{2}(1 + i)$  está dentro da curva  $\gamma$ , pois  $|z_0| = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$ , podemos usar o teorema de Cauchy para as integrais complexas, assim:

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z - \frac{1}{2}(1 + i)} dz = 2i\pi$$

- (b) Como  $z_0 = 2(1 + i)$  está fora da curva  $\gamma$ , pois  $|z_0| = 2\sqrt{2} > 1$ , o valor da integral é zero.

## Capítulo 4

# ENADE 1999

### 4.1 Questões

#### 4.1.1 Questão 1

Um modelo clássico para o crescimento de uma população de determinada espécie está descrito a seguir. Indicando por  $y = y(t)$  o número de indivíduos desta espécie, o modelo admite que a taxa de crescimento relativo da população seja proporcional à diferença  $M - y(t)$ , onde  $M > 0$  é uma constante. Isto conduz à equação diferencial  $\frac{y'}{y} = k(M - y)$ , onde  $k > 0$  é uma constante que depende da espécie. Com base no exposto:

- (a) resolva a equação diferencial acima; (valor: 10,0 pontos)
- (b) considere o modelo apresentado para o caso particular em que  $M = 1000$ ,  $k = 1$  e  $y(0) = 250$  e explique qualitativamente como se dá o crescimento da população correspondente, indicando os valores de  $t$  para os quais  $y(t)$  é crescente, e o valor limite de  $y(t)$  quando  $t \rightarrow \infty$ . (valor: 10,0 pontos)

#### 4.1.2 Questão 2

Seja  $\mathbb{Z}_3 = \bar{0}, \bar{1}, -\bar{1}$  o corpo de inteiros módulo 3 e  $\mathbb{Z}_3[x]$  o anel de polinômios em  $x$  com coeficientes em  $\mathbb{Z}_3$ .

- (a) Mostre que  $x^2 + x - 1$  é irredutível em  $\mathbb{Z}_3[x]$ . (valor: 10,0 pontos)
- (b) Mostre que o anel quociente  $\mathbb{Z}_3[x]/x^2 + x - 1$  é um corpo e que tem 9 elementos. (valor: 10,0 pontos)

### 4.1.3 Questão 3

Considere o subconjunto  $\Gamma$  do  $\mathbb{R}^2$  dado pela equação  $2(x^2 + y^2)^2 = 25(x^2 - y^2)$ .

- (a) Para que valores de  $x$  existem  $v_x$ , vizinhança de  $x$ , e função diferenciável  $y = y(x)$  definida em  $v_x$ , satisfazendo  $2(x^2 + y(x)^2)^2 = 25(x^2 - y(x)^2)$ ? Justifique. (valor: 10,0 pontos)
- (b) Obtenha a reta tangente a  $\Gamma$  no ponto  $(3, 1)$ . (valor: 10,0 pontos)

### 4.1.4 Questão 4

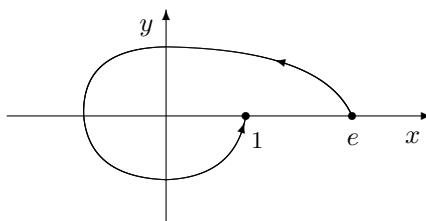
Prove que se uma função  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é contínua, então a imagem inversa  $f^{-1}(V)$  de todo subconjunto aberto  $V \subset \mathbb{R}^n$  é um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^n$ . (valor: 20,0 pontos)

**Definição:** Uma função  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é contínua num ponto  $a \in \mathbb{R}^n$  quando, para todo  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que  $|x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \epsilon$ .

### 4.1.5 Questão 5

Sejam  $\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  um campo conservativo,  $\phi : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função potencial de  $\vec{F}$  e  $\gamma : [a, b] \rightarrow D$  uma curva regular de classe  $C^1$ .

- (a) Mostre que o trabalho realizado por  $\vec{F}$  sobre  $\gamma$  é dado por  $\phi(\gamma(b)) - \phi(\gamma(a))$ . (valor: 10,0 pontos)
- (b) Calcule o trabalho realizado pelo campo  $\vec{F}(x, y) = \left( \frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right)$  sobre a curva esboçada abaixo. (valor: 10,0 pontos)



**Definições:** Um campo vetorial  $\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  diz-se conservativo (ou gradiente) se existe  $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}$ , de classe  $C^1$ , tal que  $\vec{\nabla}\phi = \vec{F}$  em todo ponto de  $D$ . Uma tal  $\phi$  chama-se função potencial. O trabalho realizado por um campo de vetores sobre uma curva  $\gamma : [a, b] \rightarrow D$  é dado por  $\int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$ .



## 4.2 Soluções

### 4.2.1 Questão 1

- (a) Dividindo ambos lados por  $(M - y)$  e integrando em relação a  $t$  temos:
- $$\int \frac{dy}{y(M - y)} = \int k dt. \text{ A integral da direita é simplesmente } kt + c. \text{ Mas}$$
- na da esquerda precisamos fazer decomposição em frações parciais. Então:

$$\frac{1}{y(M - y)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{M - y} = \frac{(B - A)y + AM}{y(M - y)} \Rightarrow \begin{cases} A & = \frac{1}{M}; \\ B - A & = 0 \end{cases}$$

Portanto nossa solução para a decomposição é:  $A = \frac{1}{M} = B$ . Então nossa integral é:

$$\frac{1}{M} \int \frac{1}{y} + \frac{1}{M - y} dy = \frac{1}{M} \ln \left( \frac{y}{y - M} \right)$$

Assim nos reduzimos a:  $\frac{1}{M} \ln \left( \frac{y}{y - M} \right) = kt + c \Rightarrow \frac{y}{y - M} = e^{Mkt + Mc}$ , ou seja:  $y = (y - M)(e^c e^{kt})^M = y(e^c e^{kt})^M - M(e^c e^{kt})^M$ , então:  $y((e^c e^{kt})^M - 1) = M(e^c e^{kt})^M$ , dividindo por  $(e^c e^{kt})^M - 1$  e chamando  $e^{cM} = C$  e  $kM = K$ , finalmente temos:

$$y = \frac{MCe^{Kt}}{Ce^{Kt} - 1}$$

multiplicando esta última equação por  $e^{-Kt}$  para cancelarmos duas exponenciais, a equação assume a forma:

$$y = \frac{MC}{C - e^{-Kt}}$$

- (b) Sendo  $M = 1000$  e  $k = 1$ , nossa constante é  $K = 1000$ , e a equação se torna

$$y = \frac{1000C}{C - e^{-1000t}}$$

o enunciado nos deu  $y(0) = 250$ , então  $250 = \frac{1000C}{C - 1} \Rightarrow C = \frac{5}{13}$ . Então nossa equação se torna:

$$y(t) = \frac{1000}{13e^{-1000t}/5 + 1}$$

A função é sempre crescente para valores positivos de  $t$ , e quando  $t \rightarrow \infty$ ,  $y \rightarrow 1000 = M$ .

### 4.2.2 Questão 2

- (a) O polinômio  $x^2 + x - 1$  é irredutível pois  $\bar{1}^2 + \bar{1} - 1 = \bar{1} \neq \bar{0}$ ,  $\bar{0}^2 + \bar{0} - 1 = \bar{2} \neq \bar{0}$  e  $\bar{2}^2 + \bar{2} - 1 = \bar{2} \neq \bar{0}$ , logo não possui raízes, então é irredutível.

## Capítulo 5

# ENADE 2000

### 5.1 Questões

#### 5.1.1 Questão 1

Seja  $\gamma$  um caminho no plano complexo, fechado, simples, suave (isto é, continuamente derivável) e que não passa por  $i$  nem por  $-i$ . Quais são os possíveis valores da integral  $\int_{\gamma} \frac{dz}{1+z^2}$ ? (valor: 20,0 pontos)

#### 5.1.2 Questão 2

Uma função  $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , com derivadas contínuas até a 2ª ordem, é dita harmônica em  $\mathbb{R}^2$  se satisfaz a Equação de Laplace:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{em } \mathbb{R}^2$$

Mostre que se  $u$  e  $u^2$  são harmônicas em  $\mathbb{R}^2$ , então  $u$  é uma função constante. (valor: 20,0 pontos)

#### 5.1.3 Questão 3

Seja  $\{A_n\}, n \in \mathbb{N}$ , uma seqüência de números reais positivos e considere a série de funções de uma variável real  $t$  dada por  $\sum_{n=0}^{\infty} (A_n)^t$ . Suponha que tal série converge se  $t = t_0 \in \mathbb{R}$ . Prove que ela converge uniformemente no intervalo  $[t_0, \infty[$ . (valor: 20,0 pontos)

#### 5.1.4 Questão 4

Sejam  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$  e  $n$  um inteiro positivo. Calcule  $A^n$ .

**Sugestão:** Use a Forma Cannica de Jordan ou o Teorema de Cayley-Hamilton.  
(valor: 20,0 pontos)

## 5.2 Soluções

### 5.2.1 Questão 2

Como  $u$  e  $u^2$  são funções harmônicas, então:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

e

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(u^2) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(u^2) = 0$$

como  $\frac{\partial}{\partial x}(u^2) = 2u \frac{\partial u}{\partial x}$ , derivando novamente:  $\frac{\partial}{\partial x}(2u \frac{\partial u}{\partial x}) = 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  e o mesmo acontece com a variável  $y$ , desse modo nossa equação de Laplace toma a forma:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + u \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = 0$$

pois  $u$  é harmônica. Portanto  $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$  e  $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ . Resolvendo estas duas equações, temos: (i)  $u(x, y) = c + \phi(y)$  e (ii)  $u(x, y) = k + \psi(x)$ , derivando a primeira em relação a  $y$  e a segunda em relação a  $x$ , obtemos:  $\phi'(y) = 0$  e  $\psi'(x) = 0$  respectivamente, o que indica que estas funções são constantes. Assim necessariamente  $\phi(y) = k$  e  $\psi(x) = c$  e temos a única solução:  $u(x, y) = c + k = C$

## Capítulo 6

# ENADE 2001

### 6.1 Questões

#### 6.1.1 Questão 1

Sabendo-se que para todo número real  $\theta$  tem-se que  $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ , deduza as fórmulas

- (a)  $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$  (valor: 10,0 pontos)
- (b)  $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$  (valor: 10,0 pontos)

#### 6.1.2 Questão 2

Uma piscina, vazia no instante  $t = 0$ , é abastecida por uma bomba d'água cuja vazão no instante  $t$  (horas) é  $V(t)$  (metros cúbicos por hora).

- (a) Determine o volume da piscina sabendo que, se  $V(t) = 500$ , a piscina fica cheia em 5 horas. (valor: 5,0 pontos)
- (b) Determine em quanto tempo a piscina ficaria cheia se  $V(t) = 50t$ . (valor: 15,0 pontos)

#### 6.1.3 Questão 3

Sejam  $A$  uma matriz real  $2 \times 2$  com autovalores  $\frac{1}{2}$  e  $\frac{1}{3}$  e  $\mathbf{v}$  um vetor de  $\mathbb{R}^2$ .

- (a)  $A$  é diagonalizável? Justifique sua resposta. (valor: 5,0 pontos)
- (b) Considere a seqüência  $\mathbf{v}, A\mathbf{v}, A^2\mathbf{v}, A^3\mathbf{v}, \dots, A^n\mathbf{v}, \dots$ . Prove que essa seqüência é convergente. (valor: 15,0 pontos)

#### 6.1.4 Questão 4

Sejam  $X$  e  $Y$  espaços métricos,  $A \subset X$  e  $f : X \rightarrow Y$  uma função.

- (a) Qual é o significado de  $A$  é aberto? (valor: 5,0 pontos)
- (b) Qual é o significado de  $A$  é fechado? (valor: 5,0 pontos)
- (c) Qual é o significado de  $f$  é contínua em  $X$ ? (valor: 5,0 pontos)
- (d) Se  $a \in Y$  e  $f$  é contínua em  $X$ , mostre que o conjunto solução da equação  $f(x) = a$  é fechado. (valor: 5,0 pontos)

#### 6.1.5 Questão 5

O corpo  $\mathbb{Z}_2$  dos inteiros módulo 2 é formado por dois elementos, 0 e 1, com as operações usuais de adição e multiplicação definidas pelas tábuas abaixo.

+	0	1
0	0	1
1	1	0

$\times$	0	1
0	0	0
1	0	1

Considere em  $\mathbb{Z}_2[x]$  isto é, no anel dos polinômios na indeterminada  $x$  cujos coeficientes pertencem a  $\mathbb{Z}_2$ , o polinômio de grau 2,  $q(x) = x^2 + x + 1$ .

- (a) Mostre que  $q(x)$  não tem raízes em  $\mathbb{Z}_2$ . (valor: 5,0 pontos)
- (b)  $q(x)$  sendo irredutível, sabe-se, pelo Teorema de Kronecker, que existem um corpo  $E$ , que é uma extensão de  $\mathbb{Z}_2$  (ou seja, tal que  $\mathbb{Z}_2$  é um subcorpo de  $E$ ) e um elemento  $\alpha \in E$  tal que  $\alpha \notin \mathbb{Z}_2$  e  $q(\alpha) = 0$ . Determine o número mínimo de elementos que  $E$  pode ter e construa as tábuas de adição e de multiplicação em  $E$ . (valor: 15,0 pontos)

## 6.2 Soluções

### 6.2.1 Questão 2

- (a)  $V = 500 \times 5 = 2500$  (metros cúbicos)
- (b)  $2500 = \int_0^{t_1} 50t dt \rightarrow 2500 = \frac{50t_1^2}{2}$ , ou seja:  $t_1 = 10$  (horas).

### 6.2.2 Questão 3

- (a)  $q(0) = 1 \neq 0$  e  $q(1) = 3 = 1 \neq 0$  portanto é irredutível.
- (b) o Conjunto  $E$  que se diz é  $\mathbb{Z}_2$  extendido com as raízes de  $q(x)$ , ou seja  
$$\alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$$

## Capítulo 7

# ENADE 2002

### 7.1 Questões

#### 7.1.1 Questão 1

Sejam  $g$  e  $h$  funções deriváveis de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$  tais que  $g(x) = h(x)$ ,  $h(x) = g(x)$ ,  $g(0) = 0$  e  $h(0) = 1$ .

- (a) Calcule a derivada de  $h^2(x) - g^2(x)$ . (valor: 10,0 pontos)
- (a) Mostre que  $h^2(x) - g^2(x) = 1$ , para todo  $x$  em  $\mathbb{R}$ . (valor: 10,0 pontos)

#### 7.1.2 Questão 2

Em um espaço métrico  $M$ , com distância  $d$ , a bola aberta de raio  $r > 0$  e centro  $p \in M$  é o conjunto  $B_r(p) = \{x \in M | d(x, p) < r\}$ . Por definição, um conjunto  $A \subset M$  é aberto se para qualquer ponto  $p \in A$  existir  $\epsilon > 0$  tal que  $B_\epsilon(p) \subset A$ .

- (a) Mostre que a união de uma família qualquer de conjuntos abertos é um conjunto aberto. (valor: 5,0 pontos)
- (b) Mostre que a interseção de uma família finita não vazia de conjuntos abertos é um conjunto aberto. (valor: 10,0 pontos)
- (c) Em  $\mathbb{R}$ , com a métrica usual, o conjunto  $\{0\}$  não é aberto. Dê exemplo de uma família infinita de conjuntos abertos de  $\mathbb{R}$  cuja interseção seja  $\{0\}$ . (valor: 5,0 pontos)

### 7.1.3 Questão 3

Seja  $A$  uma matriz quadrada de ordem  $n$ .

- (a) Defina autovalor de  $A$ . (valor: 5,0 pontos)
- (b) Se  $\lambda$  é um autovalor de  $A$ , mostre que  $2\lambda$  é um autovalor de  $2A$ . (valor: 5,0 pontos)
- (c) Se  $\lambda$  é um autovalor de  $A$ , mostre que  $\lambda^2$  é um autovalor de  $A^2$ . (valor: 10,0 pontos)

### 7.1.4 Questão 4

O complexo  $w$  é tal que a equação  $z^2 - wz + (1 - i) = 0$  admite  $1 + i$  como raiz.

- (a) Determine  $w$ . (valor: 5,0 pontos)
- (b) Determine a outra raiz da equação. (valor: 5,0 pontos)
- (c) Calcule a integral  $\int_{\gamma} \frac{dz}{z^2 - wz + (1 - i)}$ , sendo  $\gamma$  a circunferência descrita parametricamente por  $\gamma(t) = \frac{1}{2} \cos(t) + i(\frac{1}{2} \sin(t) - 1)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ . (valor: 10,0 pontos)

### 7.1.5 Questão 5

A série de potências a seguir define, no seu intervalo de convergência, uma função  $g$ ,  $g(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n} + \dots$

- (a) Determine o raio de convergência  $r$  da série. Justifique. (valor: 5,0 pontos)
- (b) Expresse  $g'(x)$  como soma de uma série de potências, para  $|x| < r$ . (valor: 5,0 pontos)
- (c) Expresse  $g'(x)$ , para  $|x| < r$ , em termos de funções elementares (polinomiais, trigonométricas, logarítmicas, exponenciais). (valor: 5,0 pontos)
- (d) Expresse  $g(x)$ , para  $|x| < r$ , em termos de funções elementares. (valor: 5,0 pontos)

### 7.1.6 Questão 6

Uma fonte de luz localizada no ponto  $L = (0, -1, 0)$  ilumina a superfície dada, parametricamente, por  $P(u, v) = (u + v, u^2, v)$ .

- (a) Calcule o vetor normal à superfície,  $\vec{N}(u, v)$ , de forma que para  $u = v = 0$  esse vetor seja  $(0, -1, 0)$ . (valor: 5,0 pontos)
- (b) Trabalhando com os vetores  $\vec{N}$  e  $L - P$ , dê uma condição sobre  $u$  e  $v$  a fim de que o ponto  $P(u, v)$  seja iluminado pela luz em  $L$ . (valor: 15,0 pontos)

## 7.2 Soluções

### 7.2.1 Questão 1

- (a)  $(h^2(x) - g^2(x))' = 2hh' - 2gg' = 2hg - 2gh = 0$
- (b) Como  $(h^2(x) - g^2(x))' = 0$ , temos que  $h^2(x) - g^2(x) = k$ . Mas  $h(0) = 1$  e  $g(0) = 0$  então:  $1^2 - 0^2 = 1 \implies k = 1$

- (a)  $(1 + i)^2 - w(1 + i) + (1 - i) = 0 \implies w = 1$
- (b) Como o enunciado disse que  $1 + i$  é raiz, então podemos rescrever a equação dada. Assim:  $z^2 - z + (1 - i) = 0$ , por inspeção percebemos que a outra raiz é  $-i$ , pois  $(-i)^2 - (-i) + (1 - i) = -1 + i + (1 - i) = 0$ .

- (c)  $\int_{\gamma} \frac{dz}{z^2 - wz + (1 - i)} = \int_{\gamma} \frac{dz}{(z - 1 + i)(z + i)}$ , decompondo com frações parciais temos:

$$\frac{1}{(z - 1 + i)(z + i)} = \frac{a + bi}{(z - 1 + i)} + \frac{c + di}{(z + i)}$$

Onde obtemos: 
$$\frac{(a + bi + c + di)z + (-b - c - d) + (c - b + a - d)i}{(z - 1 + i)(z + i)}.$$

A qual gera o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a + bi + c + di &= 0 \\ b + c + d &= -1 \\ c - b + a - d &= 0 \end{cases}$$

A primeira equação nos dá que  $a = -c$  e  $b = -d$ , substituindo na segunda equação temos:  $c = -1$ , logo,  $a = 1$ . Portanto as constantes são:  $a = 1$ ,  $c = -1$ , nosso sistema agora é apenas a equação  $b + d = 0$  Portanto podemos fazer  $b = d = 0$ . Assim as frações são  $\frac{1}{z - 1 + i} - \frac{1}{z + i}$ , e a



integral original torna-se  $\int_{\gamma} \frac{1}{z - (1-i)} - \frac{1}{z+i} dz$ . A circunferência  $\gamma$  pode ser rescrita como:  $\gamma(t) = \frac{1}{2}[\cos(t) + i \sin(t)] - i$ , desse modo percebemos que está centrada no ponto  $(0, -i)$  e possui raio  $1/2$ . Como a primeira raiz está fora da curva, o valor da integral é zero. Então:

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z - (1-i)} - \frac{1}{z+i} dz = - \int_{\gamma} \frac{1}{z+i} dz = -2i\pi$$

### 7.2.2 Questão 5

(a) Pelo teste da razão temos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} \frac{x^{2(n+1)}}{2(n+1)}}{(-1)^n \frac{x^{2n}}{2n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{2(n+1)}}{2(n+1)} \frac{2n}{x^{2n}} \right|.$$

Assim  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n}{n+1} x^2 \right|$  onde percebemos que  $|x^2| < 1$ , ou simplesmente  $|x| < 1$ . Então o raio de convergência  $r$  da série é:  $r < 1$ .

(b) Derivando:  $g'(x) = -x + x^3 - x^5 + \dots + (-1)^n x^{2n-1} + \dots$

(c) Considere a série de *Maclaurin* da função  $y = \ln(x+1)$ , i. e. :

$$\ln(x+1) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \dots$$

se utilizarmos  $x^2$  no lugar de  $x$ , teríamos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \ln(x^2+1) &= \frac{2x}{x^2+1} \\ \frac{d^2}{dx^2} \ln(x^2+1) &= \frac{2(x^2+1) - 4x^2}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{1-2x^2}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

## Capítulo 8

# ENADE 2003

### 8.1 Questões

#### 8.1.1 Questão 1

Seja  $I = \int_0^3 \int_{\sqrt{\frac{x}{3}}}^1 e^{y^3} dy dx$ .

- (a) Esboce graficamente a região de integração. (valor: 5,0 pontos)
- (b) Inverta a ordem de integração. (valor: 10,0 pontos)
- (c) Calcule o valor de  $I$ . (valor: 5,0 pontos)

#### 8.1.2 Questão 2

Seja  $\mathbb{Z}_{18}$  o anel dos inteiros módulo 18 e seja  $G$  o grupo multiplicativo dos elementos invertíveis de  $\mathbb{Z}_{18}$ .

- (a) Escreva todos os elementos do grupo  $G$ . (valor: 10,0 pontos)
- (b) Mostre que  $G$  é cíclico, calculando explicitamente um gerador, ou seja, mostre que existe  $g \in G$  tal que todos os elementos de  $G$  são potências de  $g$ . (valor: 10,0 pontos)

### 8.1.3 Questão 3

- (a) Dada a matriz simétrica  $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$ , escreva, em forma de polinômio  $f(x, y)$ , a forma quadrática definida por  $A$ , isto é, calcule os coeficientes numéricos de  $f(x, y) = v^t A v$ , onde  $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  e  $v^t$  significa  $v$  transposto. (valor: 5,0 pontos)
- (b) Encontre uma matriz invertível  $P$  tal que  $P^t A P = D$ , onde  $D$  é uma matriz diagonal. Para isto, basta tomar como  $P$  uma matriz que tenha por colunas um par de autovetores ortonormais de  $A$ . (valor: 10,0 pontos)
- (c) Na forma quadrática  $f(x, y) = v^t A v$ , faça uma transformação de coordenadas  $v = P\tilde{v}$ , sendo  $\tilde{v} = \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}$ , obtendo a forma quadrática diagonalizada, isto é, sem o termo em  $\tilde{x}\tilde{y}$ . (valor: 5,0 pontos)

### 8.1.4 Questão 4

Seja  $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ , com  $n \geq 1$ , um polinômio de coeficientes reais. Suponha que  $p'(x)$  divide  $p(x)$ .

- (a) Prove que o quociente  $q(x) = \frac{p(x)}{p'(x)}$  é da forma  $q(x) = \frac{1}{n}(x - x_0)$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$ . (valor: 5,0 pontos)
- (b) Encontre todos os polinômios  $p(x)$  que satisfazem essa condição, resolvendo a equação diferencial  $q(x)p'(x) - p(x) = 0$ . (valor: 15,0 pontos)

### 8.1.5 Questão 5

Dado um conjunto aberto  $U \subset \mathbb{R}^3$  e um campo de vetores  $X = (X_1, X_2, X_3) : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  diferenciável, o divergente de  $X$  é definido por

$$\operatorname{div} X = \frac{\partial X_1}{\partial x} + \frac{\partial X_2}{\partial y} + \frac{\partial X_3}{\partial z}$$

Para uma função de classe  $C^2$ ,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  o laplaciano de  $f$  é definido por

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

- (a) Se  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  é diferenciável e  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  é um campo de vetores diferenciável, mostre que

$$\operatorname{div}(fX) = f \operatorname{div}(X) + \nabla f \cdot X,$$

sendo  $\nabla f$  o gradiente de  $f$  e  $\nabla f \cdot X$  o produto interno entre  $\nabla f$  e  $X$ . (valor: 5,0 pontos)

- (b) Se  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  é de classe  $C^2$ , mostre que  $\operatorname{div}(f\nabla f) = f\Delta f + \|\nabla f\|^2$ , sendo  $\|\cdot\|$  a norma euclidiana. (valor: 5,0 pontos)
- (c) Se  $U = B = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| < 1\}$  e  $f : \bar{B} \rightarrow \mathbb{R}$  é de classe  $C^3$  tal que  $f(x) > 0$  para qualquer  $x \neq 0$ ,  $\operatorname{div}(f\nabla f) = 5f$  e  $\|\nabla f\|^2 = 2f$ , calcule

$$\int_S \frac{\partial f}{\partial N} dS,$$

onde  $\bar{B}$  é o fecho de  $B$ ,  $S$  é a fronteira de  $B$ ,  $N$  é a norma unitária exterior a  $S$ ,  $\frac{\partial f}{\partial N}$  é a derivada direcional de  $f$  na direção de  $N$  e  $dS$  é o elemento de área de  $S$ . (valor: 10,0 pontos)

### 8.1.6 Questão 6

Considere a função real  $f$  definida, para  $x \geq 0$ , por  $f(x) = \sqrt{2x}$ .

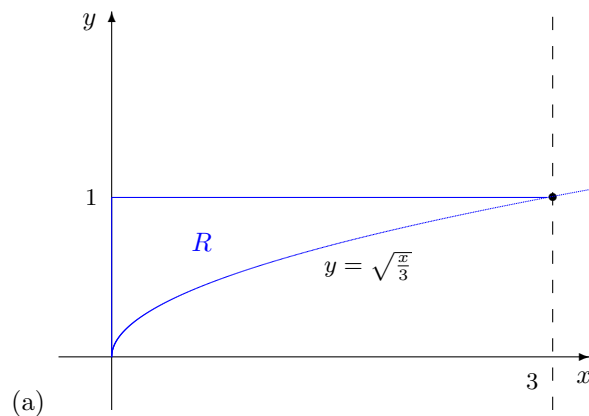
- (a) Prove que se  $0 < x < 2$ , então  $x < f(x) < 2$ . (valor: 5,0 pontos)
- (b) Prove que é convergente a seqüência definida recursivamente por
1.  $a_1 = \sqrt{2}$
  2.  $a_{n+1} = f(a_n)$ , para todo  $n \geq 1$

(valor: 5,0 pontos)

- (c) Calcule  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  (valor: 10,0 pontos)

## 8.2 Soluções

### 8.2.1 Questão 1



$$(b) \quad I = \int_0^3 \int_{\sqrt{\frac{x}{3}}}^1 e^{y^3} dy dx = \int_0^1 \int_0^{3y^2} e^{y^3} dx dy$$

$$(c) \quad I = \int_0^1 \int_0^{3y^2} e^{y^3} dx dy = \int_0^1 3y^2 e^{y^3} dy = e - 1$$

### 8.2.2 Questão 2

$$(a) \quad G = \{1, 5, 7, 11, 13\}$$

### 8.2.3 Questão 4

(a) Temos que  $p'(x) = nx^{n-1} + a_{n-1}(n-1)x^{n-2} + \dots + a_1$ . Como  $p'(x)$  divide  $p(x)$  então  $q(x)$  deve ser de grau um. Portando  $q(x) = k(x - x_0)$ .

O teorema fundamental da divisão nos dá:  $q(x)p'(x) = p(x)$ , assim  $k(x - x_0)[nx^{n-1} + a_{n-1}(n-1)x^{n-2} + \dots + a_1] = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ . Multiplicando o primeiro termo da esquerda temos  $kx^n = x^n$ , portanto  $k = \frac{1}{n}$ . Logo  $q(x) = \frac{1}{n}(x - x_0)$ .

(b) Multiplicando a equação diferencial dada no enunciado por  $\frac{1}{q(x)}$  obtemos:

$$p'(x) - \frac{p(x)}{q(x)} = 0$$

então  $\frac{p'}{p} = \frac{n}{x-x_0} \implies \ln(p) = n \ln(x - x_0) + c$ , portanto  $p(x) = k(x - x_0)^n$ .

## Capítulo 9

# ENADE 2005

### 9.1 Questões

#### 9.1.1 Questão 1

A respeito de funções de variável complexa, resolva os itens que se seguem.

- (a) Escreva a função complexa  $f(z) = f(x + iy) = z^2 - 3z + 5$  na forma  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  e verifique as equações de Cauchy-Riemann para essa função. (valor: 4,0 pontos)
- (b) Sabendo que  $g(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)(z + 1)^2} = -\frac{1}{4(z - i)} - \frac{1}{4(z + i)} + \frac{1}{2(z + 1)^2} + \frac{1}{2(z + 1)}$ , calcule a integral complexa:  $\int_{|z|=2} \frac{z^2}{(z^2 + 1)(z + 1)^2} dz$ . (valor: 6,0 pontos)

### 9.2 Soluções

#### 9.2.1 Questão 1

- (a) Fazendo  $z = x + yi$  temos:  $f(z) = (x + yi)^2 - 3(x + yi) + 5$ , ou seja:  $f(z) = (5 - 3x + x^2 - y^2) + (2xy - 3y)i$ . Daqui temos que  $u(x, y) = 5 - 3x + x^2 - y^2$  e  $v(x, y) = 2xy - 3y$ ; As condições de Cauchy-Riemann são:  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$  e  $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$ . Portanto teremos:  $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x - 3$  e  $\frac{\partial v}{\partial y} = 2x - 3$ , onde vemos  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ , e  $\frac{\partial v}{\partial x} = 2y$ ,  $-\frac{\partial u}{\partial y} = 2y$ , portanto a função satisfaz as condições citadas.

- (b) Usando a sugestão dada no enunciado vemos que as singularidades  $-1, -i, i$  estão contidas na curva fechada  $C : |z| = 2$ , assim podemos usar o teorema de Cauchy, i. e.  $\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz = \frac{2i\pi}{n!} f^{(n)}(a)$ . Multiplicando a função  $g(z)$  por  $z^2$  temos a função desejada na integração, assim  $f(z) = z^2$  e:

$$\begin{aligned} & \int_{|z|=2} \frac{z^2}{(z^2+1)(z+1)^2} dz \\ &= 2i\pi \left( -\frac{(i)^2}{4} - \frac{(-i)^2}{4} + \frac{2(-1)}{2} + \frac{(-1)^2}{2} \right) \\ &= \frac{i\pi}{2} + \frac{i\pi}{2} - 2i\pi + i\pi = 0 \end{aligned}$$

# Capítulo 10

## ENADE 2008

### 10.1 Questões

#### 10.1.1 Questão 1

Considere uma função derivável  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  que satisfaz à seguinte condição:

Para qualquer número real  $k \neq 0$ , a função  $g_k(x)$  definida por  $g_k(x) = x - kf(x)$  não é injetora.

Com base nessa propriedade, faça o que se pede nos itens a seguir e transcreva suas respostas para o Caderno de Respostas, nos locais devidamente indicados.

- (a) Mostre que, se  $g'_k(x_0) = 0$  para algum  $k \neq 0$ , então  $f'(x_0) = \frac{1}{k}$  (valor: 3,0 pontos).
- (b) Mostre que, para cada  $k \in \mathbb{R}$  não-nulo, existem números  $\alpha_k$  e  $\beta_k$  tais que  $g_k(\alpha_k) = g_k(\beta_k)$ . Além disso, justifique que, para todo  $k \in \mathbb{R}$  não-nulo, existe um número  $\theta_k$  tal que  $g'_k(\theta_k) = 0$ . (valor: 3,0 pontos).
- (c) Mostre que a função derivada de primeira ordem  $f'$  não é limitada. (valor: 4,0 pontos).

### 10.2 Soluções

#### 10.2.1 Questão 1

- (a) Derivando a função definida no item (a):  $g'_k(x) = 1 - kf'(x)$ . Fazendo  $g'_k(x) = 0$  temos:  $0 = 1 - kf'(x)$ , ou seja:  $f'(x_0) = \frac{1}{k}$ , para um certo  $x_0$



- (b) Como o exercício nos diz que a função  $g_k(x)$  não é injetora, essa definição implica que existem  $\alpha$  e  $\beta$ , diferentes, tais que:  $g_k(\alpha) = g_k(\beta)$ , mas como a mudança do valor de  $k$  gera novas funções injetoras, é cmodo escrever  $g_k(\alpha_k) = g_k(\beta_k)$  para mostrar tal fato; Usando o resultado do item (a), temos que se  $g'_k(\theta_k) = 0$  então  $f'(\theta_k) = \frac{1}{k}$ , portanto para cada valor de  $k \neq 0$  temos uma função  $g'_k(\theta_k) = 0$
- (c) A função  $f'$  não é limitada pois a função  $1/x$ , para  $x \neq 0$  não é limitada.

# Capítulo 11

## ENADE 2011

### 11.1 Questões

#### 11.1.1 Questão 1

Em um prédio de 8 andares, 5 pessoas aguardam o elevador no andar térreo. Considere que elas entrarão no elevador e sairão, de maneira aleatória, nos andares de 1 a 8.

Com base nessa situação, faça o que se pede nos itens a seguir, apresentando o procedimento de cálculo utilizado na sua resolução.

- (a) Calcule a probabilidade de essas pessoas descenderem em andares diferentes. (valor: 6,0 pontos).
- (b) Calcule a probabilidade de duas ou mais pessoas descenderem em um mesmo andar. (valor: 4,0 pontos).

#### 11.1.2 Questão 2

Considere a sequência numérica definida por

$$\begin{cases} a_1 = a; \\ a_{n+1} = \frac{4a_n}{2 + a_n^2}, \end{cases} \text{ para } n \geq 1.$$

Use o princípio de indução finita e mostre que  $a_n < \sqrt{2}$ , para todo número natural  $n \geq 1$  e para  $0 < a < \sqrt{2}$ , seguindo os passos indicados nos itens a seguir:

- (a) escreva a hipótese e a tese da propriedade a ser demonstrada; (valor: 1,0 ponto)
- (b) mostre que  $s = \frac{4a}{2+a^2} > 0$ , para todo  $a > 0$ ; (valor: 1,0 ponto)
- (c) prove que  $s^2 < 2$ , para todo  $0 < a < \sqrt{2}$ ; (valor: 3,0 pontos)
- (d) mostre que  $0 < s < \sqrt{2}$ ; (valor: 2,0 pontos)
- (e) suponha que  $a_n < \sqrt{2}$  e prove que  $a_{n+1} < 2$ ; (valor: 1,0 ponto)
- (f) conclua a prova por indução. (valor: 2,0 pontos)

### 11.1.3 Questão 3

O Teorema do Valor Intermediário é uma proposição muito importante da análise matemática, com inúmeras aplicações teóricas e práticas. Uma demonstração analítica desse teorema foi feita pelo matemático Bernard Bolzano [1781-1848]. Nesse contexto, faça o que se pede nos itens a seguir:

- (a) Enuncie o Teorema do Valor Intermediário para funções reais de uma variável real; (valor: 2,0 pontos)
- (b) Resolva a seguinte situação-problema.  
O vencedor da corrida de São Silvestre-2010 foi o brasileiro Mailson Gomes dos Santos, que fez o percurso de 15 km em 44 min e 7 seg. Prove que, em pelo menos dois momentos distintos da corrida, a velocidade instantânea de Mailson era de 5 metros por segundo. (valor: 4,0 pontos)
- (c) Descreva uma situação real que pode ser modelada por meio de uma função contínua  $f$ , definida em um intervalo  $[a, b]$ , relacionando duas grandezas  $x$  e  $y$ , tal que existe  $k \in (a, b)$  com  $f(x) \neq f(k)$ , para todo  $x \in (a, b)$ ,  $x \neq k$ . Justifique sua resposta. (valor: 4,0 pontos)

## 11.2 Soluções

### 11.2.1 Questão 1

- (a) Considerando que as pessoas escolhem de forma aleatória o andar que desejam ir, cada uma das pessoas têm 8 possibilidades, totalizando, pelo *princípio multiplicativo*  $8^5$  situações diferentes, mas as que todas as pessoas saem em andares diferentes ocorrem do seguinte modo: a primeira tem 8 escolhas, a segunda apenas 7, pois não pode sair no mesmo andar da primeira, a terceira 6, a quarta 5 e a quinta 4, ou seja são 8.7.6.5.4 casos favoráveis. Portanto a probabilidade deles ocorrerem é

$$P_1 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{8^5} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{8^4} = \frac{7 \cdot 5 \cdot 3}{8^3} = \frac{105}{512}$$

- (b) A probabilidade de mais de uma pessoa descenderem num mesmo andar é a probabilidade complementar do item anterior, ou seja:

$$P_2 = 1 - P_1 = 1 - \frac{105}{512} = \frac{407}{512}$$

### 11.2.2 Questão 2

- (a) Hipótese do *Princípio da Indução*:  $a_1 = a$ ;  $a_{n+1} = \frac{4a_n}{2+a_n^2}$ , para  $n \geq 1$  e  $0 < a < \sqrt{2}$  e a tese é:  $a_n < \sqrt{2}, \forall n \geq 1$
- (b) Se  $s = \frac{4a}{2+a^2}$  e pela hipótese de indução  $a > 0$ , então  $4a > 0$  e  $2+a^2 > 0$ , portanto  $s > 0$
- (c) Como  $s = \frac{4a}{2+a^2}$  temos que:

$$s^2 = \frac{16a^2}{(2+a^2)^2} = \frac{16a^2}{4+4a^2+a^4} = \frac{16a^2}{(a^2-2)^2+8a^2} < \frac{16a^2}{8a^2} = 2$$

portanto provamos que  $s^2 < 2$ .

- (d) Temos que  $s$  é sempre positiva e  $0 < s^2 < 2$ , portanto se extrairmos a raiz quadrada obtemos:  $0 < s < \sqrt{2}$
- (e) Como temos  $a_n < \sqrt{2}$  e  $s = \frac{4a}{2+a^2} < \sqrt{2}, \forall a, a < \sqrt{2}$ , logo:  $a_{n+1} = \frac{4a_n}{2+a_n^2} < \sqrt{2} < 2$
- (f) Para  $n = 1$  temos:  $a_2 = s < \sqrt{2}$ , é válida a hipótese. E como foi mostrado no item anterior:  $a_{n+1} = \frac{4a_n}{2+a_n^2} < \sqrt{2}$ , assim concluímos a indução.

### 11.2.3 Questão 3

- (a) Se  $f$  é uma função contínua em um intervalo  $[a, b]$ , então o *Teorema do Valor Intermediário* diz que para todo  $f(a) \leq k \leq f(b)$  existe um número  $c \in (a, b)$  tal que:  $f(c) = k$ .
- (b) Considerando que a velocidade do corredor brasileiro possa ser expressa por uma função contínua,  $15(km) = 15000(m)$  e como ele percorreu este percurso em  $44(min) = 2640(s)$  e  $7(seg)$ , ou seja  $2647(seg)$ , sua velocidade média foi  $v_m = \frac{15000}{2647} \approx 5,6(m/s)$ . Como os corredores iniciam a corrida parados, temos que  $v_0 = 0$  e considerando que ele tenha parado no instante que terminou a corrida, temos  $v_{2647} = 0$ . Pelo teorema enunciado existe

um único momento  $t$  em que  $v_t = 5,6(m/s)$ , mas como  $5 < 5,6$  e  $v_0 = v_{2647} = 0$ , então existem pelo menos dois instantes  $a$  e  $b$ , por exemplo, em que a velocidade foi  $5(m/s)$ .

- (c) Qualquer situação problema que pode ser modelada por uma função injetora.

## Capítulo 12

# ENADE 2014

### 12.1 Questões

#### 12.1.1 Questão 1

Os principais efeitos visuais da computação gráfica vistos em uma tela são resultados de aplicações de transformações lineares. Translação, rotação, redimensionamento e alteração de cores são apenas alguns exemplos.

Considere que uma tela é cortada por dois eixos,  $x$  e  $y$ , ortogonais entre si, formando um sistema de coordenadas com origem no centro da tela. Suponha que, nessa tela plana, existe a imagem de uma elipse com eixo maior de tamanho 4, paralelo ao eixo  $x$ , e cujos focos têm coordenadas  $(-1, 2)$  e  $(1, 2)$ . Considere  $T$  um operador linear definido em  $\mathbb{R}^2$ .

De acordo com as informações acima, faça o que se pede nos itens a seguir, apresentando os cálculos utilizados na sua resolução.

- (a) Mostre que o ponto  $(0, 2 + \sqrt{3})$  pertence à elipse. (valor: 3,0 pontos)
- (b) Suponha que, em cada ponto da tela, seja aplicado o operador linear  $T(x, y) = (x + y, -2x + 4y)$ . Quais serão as coordenadas dos focos da elipse após a aplicação de  $T$ ? (valor: 3,0 pontos)
- (c) Calcule os autovalores do operador linear  $T(x, y) = (x + y, -2x + 4y)$ . (valor: 4,0 pontos)

#### 12.1.2 Questão 2

O número de ouro é conhecido há mais de dois mil anos, sendo encontrado nas artes, nas pirâmides do Egito e na natureza. Para construir o número de ouro

apenas com o auxílio de uma régua não graduada e de um compasso, utiliza-se o seguinte procedimento: dado um segmento  $AB$  qualquer, marca-se o seu ponto médio; constrói-se o segmento  $BC$  perpendicular a  $AB$  e com a metade do comprimento de  $AB$ ; marca-se o ponto  $E$  sobre a hipotenusa do triângulo  $ABC$ , tal que  $\overline{EC}$  e  $\overline{BC}$  sejam iguais; e determina-se o ponto  $D$  no segmento  $AB$  tal que  $\overline{AD}$  e  $\overline{AE}$  sejam iguais. Com esse procedimento, o ponto  $D$  divide o segmento  $AB$  na razão áurea.

A partir da construção geométrica do número de ouro e considerando  $x$  como o comprimento do segmento  $AB$ , faça o que se pede nos itens a seguir, apresentando os cálculos utilizados na sua resolução.

- (a) Determine o comprimento do segmento  $AC$  em função de  $x$ . (valor: 4,0 pontos)
- (b) Determine o comprimento do segmento  $AD$  em função de  $x$ . (valor: 4,0 pontos)
- (c) Determine o número de ouro dado pelo quociente  $\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}}$ . (valor: 2,0 pontos)

### 12.1.3 Questão 3

A Torre de Hanói foi inventada por Edouard Lucas em 1883. Há uma história sobre a Torre, imaginada pelo próprio Lucas:

No começo dos tempos, Deus criou a Torre de Brahma, que contém três pinos de diamante e colocou no primeiro pino 64 discos de ouro maciço. Deus, então, chamou seus sacerdotes e ordenou-lhes que transferissem todos os discos para o terceiro pino, segundo certas regras. Os sacerdotes, então, obedeceram e começaram o seu trabalho, dia e noite. Quando eles terminassem, a torre de Brahma iria ruir e o mundo acabaria.



Esse é um dos quebra-cabeças matemáticos mais populares, que consiste de  $n$  discos com um furo em seu centro e de tamanhos diferentes e de uma base com três pinos na posição vertical onde são colocados os discos. O jogo mais simples é constituído de três pinos mas a quantidade pode variar, deixando o jogo mais difícil à medida que o número de discos aumenta. Os discos formam

uma torre onde todos são colocados em um dos pinos em ordem decrescente de tamanho. O objetivo do quebra-cabeça é transferir toda a torre de discos para um dos outros pinos, que estão inicialmente vazios, de modo que cada movimento é feito somente com um disco, nunca havendo um disco maior sobre um disco menor, como mostra a figura acima.

Considerando uma torre de Hanói de 3 pinos, faça o que se pede nos itens a seguir.

- (a) Ao planejar uma aula de matemática utilizando-se a Torre de Hanói, quais seriam os objetivos a serem alcançados de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais e o que se espera com o uso de jogos no processo de ensino-aprendizagem? (valor: 3,0 pontos)
- (b) Cite três conceitos matemáticos de Educação Básica que podem ser explorados em sala de aula utilizando-se a Torre de Hanói? (valor: 3,0 pontos)
- (c) Obtenha uma fórmula para o número mínimo de movimentos necessários para resolver a Torre de Hanói com discos. Justifique a sua resposta. (valor: 4,0 pontos)

#### 12.1.4 Questão 4

Atualmente, a maioria dos editores de texto oferece o recurso de correção ortográfica. Esse recurso consiste em destacar, entre as palavras digitadas, aquelas com possíveis erros de grafia. Por exemplo, quando se digita a palavra “caza”, o recurso de correção destaca essa palavra, pois a palavra “caza” não existe na língua portuguesa. Também é comum o recurso de correção ortográfica sugerir uma outra palavra para substituir a palavra incorreta.

A sugestão de quais palavras podem substituir a palavra incorreta é feita com uma medida da distância entre a palavra incorreta e as palavras que constam no dicionário do editor de texto. Existem diversas maneiras de medir a distância entre duas palavras. Uma delas é a denominada *Distância de Hamming*, na qual a medida da distância entre duas palavras  $x$  e  $y$ , em suas respectivas posições. Mais formalmente, se  $x = x_1x_2x_3 \dots x_n$  e  $y = y_1y_2y_3 \dots y_n$  são palavras em que  $x_i$  e  $y_i$  são letras do alfabeto, para  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ , então  $d(x, y) = \#(\{i : x_i \neq y_i, \text{ com } i = 1, 2, 3, \dots, n\})$ , em que  $\#(\{3\}) = 1$ , já que elas diferem apenas na terceira letra.

A partir dessas informações, faça o que se pede nos itens a seguir.

- (a) Mostre que a Distância de Hamming é uma métrica no conjunto das palavras com letras. (valor: 5,0 pontos)
- (b) Mostre que o conjunto das palavras com letras, munido da Distância de Hamming, é um espaço métrico discreto. (valor: 5,0 pontos)



### 12.1.5 Questão 5

Uma equação diofantina linear nas incógnitas  $x$  e  $y$  é uma equação da forma  $ax + by = c$ , em que  $a$ ,  $b$  e  $c$  são inteiros, e as únicas soluções  $(x_0, y_0)$  que interessam são aquelas em que  $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ .

Nesse contexto, considere que os ingressos de um cinema custam R\$ 9,00 para estudantes e R\$ 15,00 para o público geral, e que, em certo dia, durante determinado período, a arrecadação nas bilheterias desse cinema foi R\$ 246,00.

A partir das informações acima, faça o que se pede nos itens a seguir.

- (a) Obtenha uma equação diofantina linear que modele a situação acima, indicando o significado das incógnitas. (valor: 3,0 pontos)
- (b) Quantas e quais são as soluções do problema descrito no item (a)? (valor: 7,0 pontos)

## 12.2 Soluções