



SISTEMA DE AVALIAÇÃO
DA EDUCAÇÃO SUPERIOR

ENC

Exame Nacional de Cursos 2003

Instruções

1- Você está recebendo o seguinte material:

a) este caderno com o enunciado das 40 (quarenta) **questões objetivas**, das 6 (seis) **questões discursivas** específicas para cada área, das quais você deverá responder a 5 (cinco), à sua escolha, da mesma área, e das questões relativas às suas **impressões sobre a prova**, assim distribuídas:

Partes	N ^{os} das Questões	N ^{os} das pp. neste Caderno	Valor de cada parte
A - Objetiva	1 a 40	3 a 6	50%
B - Discursiva específica de BACHARELADO	1 a 6	7 e 8	50%
C - Discursiva específica de LICENCIATURA	7 a 12	9 e 10	
Impressões sobre a prova	41 a 49	11	—

b) 01 Caderno de Respostas em cuja capa existe, na parte inferior, um cartão destinado às respostas das questões objetivas e de impressões sobre a prova. O desenvolvimento e as respostas das questões discursivas deverão ser feitos a caneta esferográfica de tinta preta e dispostos nos espaços especificados nas páginas do Caderno de Respostas.

2 - Verifique se este material está em ordem e se o seu nome no Cartão-Resposta está correto. Caso contrário, notifique imediatamente a um dos Responsáveis pela sala.

3 - Após a conferência do seu nome no Cartão-Resposta, você deverá assiná-lo no espaço próprio, utilizando caneta esferográfica de tinta preta e, imediatamente após, deverá assinalar, também no espaço próprio, o número correspondente a sua prova (①, ②, ③ ou ④). Deixar de assinalar esse número implica anulação da parte objetiva da prova.

4 - No Cartão-Resposta, a marcação das letras correspondentes às respostas assinaladas por você para as questões objetivas (apenas uma resposta por questão) deve ser feita cobrindo a letra e preenchendo todo o espaço compreendido pelo círculo que a envolve com um traço contínuo e denso, a lápis preto nº 2 ou a caneta esferográfica de tinta preta. A leitora ótica é sensível a marcas escuras, portanto, preencha os campos de marcação completamente, sem deixar claros.

Exemplo: ① ② ③ ● ④

5 - Tenha cuidado com o Cartão-Resposta, para não o dobrar, amassar ou manchar. Este Cartão somente poderá ser substituído caso esteja danificado em suas margens-superior e/ou inferior - barra de reconhecimento para leitura ótica.

6 - Esta prova é individual. Você pode usar calculadora científica; entretanto são vedadas qualquer comunicação e troca de material entre os presentes, consultas a material bibliográfico, cadernos ou anotações de qualquer espécie.

7 - Quando terminar, entregue a um dos Responsáveis pela sala o Cartão-Resposta grampeado ao Caderno de Respostas e assine a Lista de Presença. Cabe esclarecer que nenhum graduando deverá retirar-se da sala antes de decorridos 90 (noventa) minutos do início do Exame. Após esse prazo, você poderá sair e levar este Caderno de Questões.

ATENÇÃO:

Você poderá retirar o boletim com seu desempenho individual pela Internet, mediante a utilização de uma senha pessoal e intransferível, a partir de novembro. A sua senha é o número de código que aparece no lado superior direito do Cartão-Resposta. Guarde bem esse número, que lhe permitirá conhecer o seu desempenho. Caso você não tenha condições de acesso à Internet, solicite o boletim ao INEP no endereço: Esplanada dos Ministérios, Bloco L, Anexo II, Sala 411 - Brasília/DF - CEP 70047-900, juntando à solicitação uma fotocópia de seu documento de identidade.

8 - Você terá 04 (quatro) horas para responder às questões objetivas, discursivas e de impressões sobre a prova.

OBRIGADO PELA PARTICIPAÇÃO!

PROVA

1

**CADERNO
DE
QUESTÕES**

MATEMÁTICA

MEC

Ministério da
Educação

INEP

Instituto Nacional de Estudos e
Pesquisas Educacionais "Anísio Teixeira"

DAES

Diretoria de Estatísticas e Avaliação
da Educação Superior

Consórcio

Fundação Cesgranrio/Fundação Carlos Chagas

PRIMEIRA PARTE – QUESTÕES OBJETIVAS

ANTES DE MARCAR SUAS RESPOSTAS, ASSINALE, NO ESPAÇO PRÓPRIO DO CARTÃO-RESPOSTA, O NÚMERO DO SEU GABARITO.

1

As probabilidades dos eventos X , Y e $X \cap Y$ são iguais a 0,6; 0,5 e 0,1, respectivamente. Quanto vale a probabilidade do evento $X - Y$?

- (A) 0,1 (B) 0,2 (C) 0,3 (D) 0,4 (E) 0,5

2

O conjunto das soluções reais da equação

$$2x + 3 - (x + 1) = x + 4 \text{ é}$$

- (A) \emptyset (B) $\{0\}$ (C) $\{2\}$ (D) $\{4\}$ (E) $\{2, 4\}$

3

Se o resto da divisão do inteiro N por 5 é igual a 3, o resto da divisão de N^2 por 5 é, necessariamente, igual a

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

4

A força gravitacional com que o Sol atrai a Terra

- (A) é menor que a força com que a Terra atrai o Sol.
(B) é maior que a força com que a Terra atrai o Sol.
(C) é igual à força com que a Terra atrai o Sol.
(D) dobraria, se a distância entre a Terra e o Sol se reduzisse à metade.
(E) dobraria, se as massas da Terra e do Sol dobrassem.

5

Toda sequência limitada de números reais

- (A) é convergente.
(B) é divergente.
(C) é monótona.
(D) admite subsequência convergente.
(E) tem apenas um número finito de termos distintos.

6

A função $F: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ definida por $F(x, y) = (x - 3)^2 + (4y + 1)^2 - 4$

- (A) não tem máximo nem mínimo.
(B) tem máximo e mínimo.
(C) tem máximo, mas não tem mínimo.
(D) tem mínimo, mas não tem máximo.
(E) é limitada.

7

Um quadrado de lado 2 gira em torno de um de seus lados, gerando um sólido de revolução. O volume desse sólido é igual a

- (A) $\frac{4\pi}{3}$ (B) 2π (C) $\frac{8\pi}{3}$ (D) 4π (E) 8π

8

Num plano, o lugar geométrico dos pontos que equidistam de uma reta fixa e de um ponto fixo que não pertence à reta é uma

- (A) reta.
(B) parábola.
(C) elipse.
(D) hipérbole.
(E) circunferência.

9

Os inteiros, com a adição e a multiplicação usuais, constituem um exemplo de

- (A) corpo.
(B) anel com unidade.
(C) anel com divisores de zero.
(D) grupo multiplicativo abeliano.
(E) grupo multiplicativo não abeliano.

10

Se a sequência $\{a_n\}$ é convergente, então $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n)$

- (A) vale 0.
(B) vale 1.
(C) é positivo e diferente de 1.
(D) é infinito.
(E) pode não existir.

11

Um triângulo de lados a , b e c cujas alturas são h_a , h_b e h_c é tal que $a > b > c$. Então, necessariamente,

- (A) a maior altura é h_a .
(B) a maior altura é h_b .
(C) a maior altura é h_c .
(D) a menor altura é h_b .
(E) a menor altura é h_c .

12

O centro do círculo circunscrito a um triângulo é o ponto de encontro das

- (A) mediatrizes de seus lados.
(B) suas medianas.
(C) suas alturas.
(D) suas bissetrizes internas.
(E) suas bissetrizes externas.

13

Quantos são os números complexos cujo cubo vale i ?

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) infinitos

14

Se $P(x)$ é um polinômio do segundo grau cujas raízes são 2 e 3, o polinômio $[P(x)]^2$ admite

- (A) 2 e 3 como raízes simples.
(B) 2 e 3 como raízes duplas.
(C) 4 e 9 como raízes simples.
(D) 4 e 9 como raízes duplas.
(E) duas raízes reais e duas não reais.

15

O gráfico da função real $f(x) = \sqrt[3]{x}$ pode ser obtido do gráfico da função real $g(x) = x^3$ por meio de uma

- (A) reflexão no eixo dos x .
(B) reflexão no eixo dos y .
(C) reflexão na bissetriz dos quadrantes ímpares.
(D) reflexão na bissetriz dos quadrantes pares.
(E) simetria em relação à origem.

16

Escalonando o sistema

$$\begin{cases} x - 2y + 4z = -1 \\ 2x + y - 7z = 3 \\ x - 4y + 10z = -3 \end{cases}$$

$$\text{chegou-se a } \begin{cases} x - 2z = 1 \\ y - 3z = 1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Então, os três planos dados pelas equações do sistema inicial

- (A) são paralelos.
 (B) têm apenas um ponto comum.
 (C) têm uma reta comum.
 (D) têm interseção vazia, porque dois deles são paralelos.
 (E) têm interseção vazia, embora não haja entre eles dois que sejam paralelos.

17

Em \mathbb{R}^2 , a equação $xy = 1$ representa uma

- (A) reta.
 (B) circunferência.
 (C) elipse.
 (D) parábola.
 (E) hipérbole.

18

Quanto vale $\lim_{x \rightarrow \infty} [\ln 2x - \ln x]$?

- (A) 0
 (B) $\ln 2$
 (C) 1
 (D) e
 (E) ∞

19

Se q é um número real, a série $1 + q + q^2 + \dots + q^n + \dots$ é convergente se e somente se

- (A) $q \leq -1$
 (B) $q \leq 1$
 (C) $|q| \leq 1$
 (D) $|q| < 1$
 (E) $|q| > 1$

20

O lugar geométrico dos pontos do espaço que eqüidistam dos três planos coordenados é

- (A) uma reta.
 (B) a união de 2 retas.
 (C) a união de 3 retas.
 (D) a união de 4 retas.
 (E) a união de 8 retas.

21

"Para calcular o índice de discriminação das questões de múltipla escolha, foi adotado o seguinte procedimento: calcularam-se as notas de cada graduando no conjunto das questões objetivas. (...) A partir daí, os 27% que tiveram as notas mais altas foram denominados de grupo superior de desempenho e os 27% com as notas mais baixas, grupo inferior de desempenho. Verificou-se, então, para cada questão, o percentual dos integrantes de cada um desses grupos que acertaram a resposta. O índice de discriminação foi calculado pela diferença entre essas duas razões."

(adaptado de MEC/INEP/DAES. **Relatório do Exame Nacional de Cursos 2002** - Matemática)

Entre que valores pode variar o índice de discriminação?

- (A) $-\infty$ e ∞
 (B) -1 e 0
 (C) -1 e 1
 (D) 0 e 1
 (E) 0 e ∞

22

Se $\cos a = 0,6$, então $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - a\right)$

- (A) vale $-0,8$.
 (B) vale $-0,6$.
 (C) vale $0,6$.
 (D) vale $0,8$.
 (E) só pode ser determinado com o conhecimento do quadrante de a .

23

A integral imprópria $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$ é convergente se e somente se

- (A) $p > 1$
 (B) $p = 1$
 (C) $p \geq 1$
 (D) $p < 1$
 (E) $p > 0$

24

Defina, no conjunto dos inteiros positivos, a operação $*$ por $a * b = \text{máximo divisor comum de } a \text{ e } b$. Assinale, a respeito de $*$, a afirmativa **FALSA**.

- (A) $*$ é comutativa.
 (B) $*$ é associativa.
 (C) 1 é elemento neutro.
 (D) $a * a = a$, para todo a .
 (E) Para cada a , existe b tal que $a * b = 1$.

25

Uma base do espaço vetorial das soluções da equação diferencial $y'' + y = 0$ é formada pelas funções

- (A) $f_1(x) = \sin x$ e $f_2(x) = \cos x$
 (B) $f_1(x) = \sin x$ e $f_2(x) = 2\sin x$
 (C) $f_1(x) = \cos x$ e $f_2(x) = 2\cos x$
 (D) $f_1(x) = x$ e $f_2(x) = x^{-1}$
 (E) $f_1(x) = e^x$ e $f_2(x) = e^{-x}$

26

Se $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tem todas as derivadas contínuas, $g'(a) = g''(a) = 0$ e $g'''(a) = 2$, então a função g possui, em $x = a$, um

- (A) máximo relativo.
- (B) máximo absoluto.
- (C) mínimo relativo.
- (D) mínimo absoluto.
- (E) ponto de inflexão.

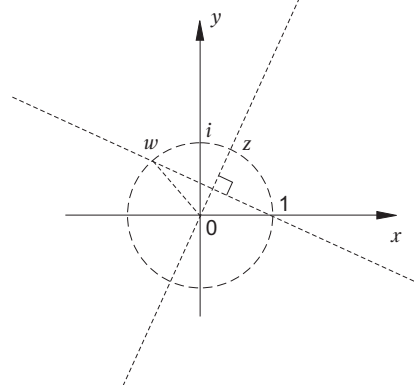
27

Considere uma caixa d'água, inicialmente vazia, em forma de tronco de cone reto, cuja maior base é a superior, e que está sendo enchida por uma torneira de vazão constante. Em cada instante t , entre o momento em que a torneira foi aberta e aquele em que a caixa ficou cheia, seja $h(t)$ a altura da água na caixa. A respeito dos sinais de $h'(t)$ e $h''(t)$, pode-se afirmar que

- (A) $h'(t) > 0$ e $h''(t) > 0$
- (B) $h'(t) > 0$ e $h''(t) < 0$
- (C) $h'(t) > 0$, mas o sinal de $h''(t)$ varia.
- (D) $h'(t) < 0$ e $h''(t) > 0$
- (E) $h'(t) < 0$ e $h''(t) < 0$

28

Na figura, z e w são números complexos.



Então, w é igual a

- (A) $1/z$
- (B) $2/z$
- (C) z^2
- (D) $2z - 1$
- (E) $2z$

29

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[x \cdot \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right]$$

- (A) vale 0.
- (B) vale 1.
- (C) vale e .
- (D) é infinito.
- (E) não existe.

30

Considere uma piscina e, em cada ponto da água, a pressão hidrostática no ponto. Em cada ponto, o gradiente de pressão

- (A) é horizontal.
- (B) é vertical e aponta para cima.
- (C) é vertical e aponta para baixo.
- (D) é inclinado e aponta para cima.
- (E) é inclinado e aponta para baixo.

31

A matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, considerada como transformação do plano, representa uma

- (A) projeção.
- (B) simetria central.
- (C) simetria axial.
- (D) homotetia.
- (E) rotação.

32

Em \mathbb{R}^3 , os vetores (x, y, z) tais que $x + y = 0$

- (A) formam um subespaço vetorial de dimensão 0.
- (B) formam um subespaço vetorial isomorfo a \mathbb{R} .
- (C) formam um subespaço vetorial isomorfo a \mathbb{R}^2 .
- (D) formam um subespaço vetorial isomorfo a \mathbb{R}^3 .
- (E) não formam um subespaço vetorial.

33

A função real definida por $f(x) = 4x^2$, se $x > 1$, e $f(x) = k + x$, se $x \leq 1$, será contínua, se a constante k valer

- (A) 0
- (B) 1
- (C) 2
- (D) 3
- (E) 4

34

Sejam $M = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\}$ e $N = [1, 2[$. O conjunto dos

pontos de acumulação de $M \cup N$ é

- (A) $M \cup N$
- (B) $[1, 2]$
- (C) N
- (D) $\{0\} \cup [1, 2[$
- (E) $\{0\} \cup [1, 2]$

35

Se p é inteiro e positivo, a soma da série

$$1 + \frac{px}{1!} + \frac{p(p-1)}{2!} x^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!} x^3 + \dots \text{ vale}$$

- (A) $\frac{1}{1-px}$
- (B) e^{px}
- (C) pe^{px}
- (D) $(1+x)^p$
- (E) $(1+p)^x$

36

Em um jogo de par-ou-ímpar, cada um dos dois jogadores escolhe, ao acaso, um dos seis inteiros de 0 a 5. Verifica-se, então, se a soma dos números escolhidos é par ou ímpar. Observando o jogo, José concluiu que era mais provável que a soma fosse par do que ímpar, porque há onze valores possíveis para a soma, os inteiros de 0 a 10, e, entre eles, há seis números pares e apenas cinco números ímpares.

Assinale, a respeito da conclusão de José e da justificativa por ele apresentada, a afirmativa correta.

- (A) As probabilidades são iguais; José errou quando considerou 0 como par.
- (B) As probabilidades são iguais; José errou quando considerou igualmente prováveis as várias somas possíveis.
- (C) A probabilidade de a soma ser par é menor que a de ser ímpar.
- (D) A probabilidade de a soma ser par é maior do que a de ser ímpar, mas não pelo motivo apresentado por José.
- (E) A conclusão de José e sua justificativa estão corretas.

37

Um vetor de \mathbf{R}^2 que constitui com $(1, 0)$ um par de vetores linearmente dependentes é

- (A) $(-1, -1)$
- (B) $(-1, 0)$
- (C) $(0, 1)$
- (D) $(1, 1)$
- (E) $(2, 3)$

38

Sejam p e q inteiros positivos, relativamente primos (primos entre si), $q \geq 2$, e seja D o conjunto dos fatores primos de q .

O racional $\frac{p}{q}$ admitirá uma representação decimal finita se e somente se

- (A) $D \supset \{2, 5\}$
- (B) $D = \{2, 5\}$
- (C) $D \subset \{2, 5\}$
- (D) $D \cap \{2, 5\} = \emptyset$
- (E) $D \cap \{2, 5\} \neq \emptyset$

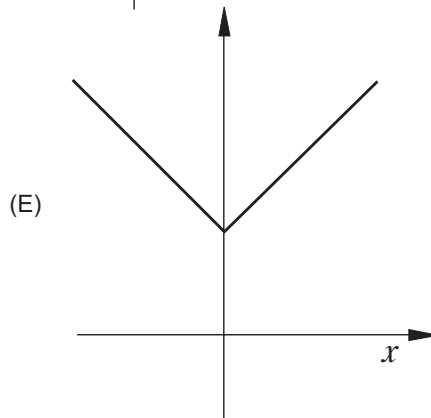
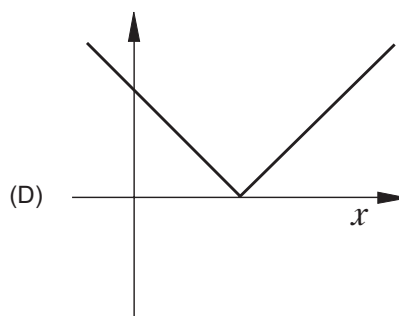
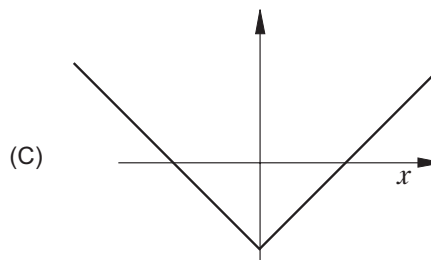
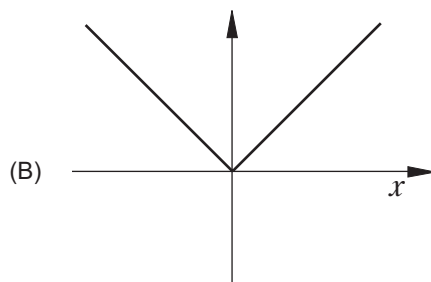
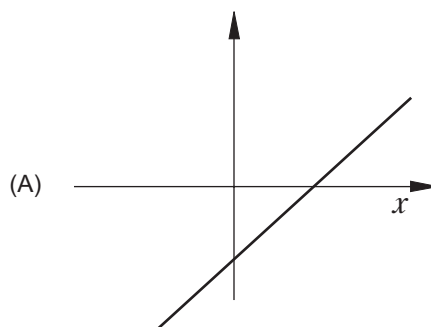
39

Em \mathbf{R}^3 , a equação $x^2 - y^2 - z^2 = 0$ representa

- (A) um elipsóide.
- (B) um parabolóide.
- (C) um hiperbolóide de uma folha.
- (D) um hiperbolóide de duas folhas.
- (E) uma superfície cônica.

40

Qual dos gráficos a seguir melhor representa a função que a cada número real x associa a distância de x ao número 1?



SEGUNDA PARTE – QUESTÕES DISCURSIVAS ESPECÍFICAS PARA OS FORMANDOS DE BACHARELADO

A seguir, são apresentadas 6 (seis) questões das quais você deverá responder a apenas 5 (cinco), à sua escolha. Você deve indicar as questões escolhidas nos locais apropriados do Caderno de Respostas. Se você responder a todas as questões, serão corrigidas apenas as 5 (cinco) primeiras respostas.

1

Seja $I = \int_0^3 \int_{\sqrt{x}}^1 e^{y^3} dy dx$.

- a) Esboce graficamente a região de integração. (valor: 5,0 pontos)
- b) Inverta a ordem de integração. (valor: 10,0 pontos)
- c) Calcule o valor de I . (valor: 5,0 pontos)

2

Seja \mathbb{Z}_{18} o anel dos inteiros módulo 18 e seja G o grupo multiplicativo dos elementos invertíveis de \mathbb{Z}_{18} .

- a) Escreva todos os elementos do grupo G . (valor: 10,0 pontos)
- b) Mostre que G é cíclico, calculando explicitamente um gerador, ou seja, mostre que existe $g \in G$ tal que todos os elementos de G são potências de g . (valor: 10,0 pontos)

3

- a) Dada a matriz simétrica $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}$, escreva, em forma de polinômio $f(x,y)$, a forma quadrática definida por A , isto é, calcule os coeficientes numéricos de

$f(x,y) = v^t A v$, onde $v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ e v^t significa “ v transposto”. (valor: 5,0 pontos)

- b) Encontre uma matriz invertível P tal que $P^t A P = D$, onde D é uma matriz diagonal. Para isto, basta tomar como P uma matriz que tenha por colunas um par de autovetores ortonormais de A . (valor: 10,0 pontos)
- c) Na forma quadrática $f(x,y) = v^t A v$, faça uma transformação de coordenadas $v = P \tilde{v}$, sendo $\tilde{v} = \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix}$, obtendo a forma quadrática diagonalizada, isto é, sem o termo em $\tilde{x}\tilde{y}$. (valor: 5,0 pontos)

4

Seja $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$, com $n \geq 1$, um polinômio de coeficientes reais. Suponha que $p'(x)$ divide $p(x)$.

- a) Prove que o quociente $q(x) = \frac{p(x)}{p'(x)}$ é da forma $q(x) = \frac{1}{n}(x - x_0)$, $x_0 \in \mathbb{R}$. (valor: 5,0 pontos)
- b) Encontre todos os polinômios $p(x)$ que satisfazem essa condição, resolvendo a equação diferencial $q(x) p'(x) - p(x) = 0$. (valor: 15,0 pontos)

5

Dado um conjunto aberto $U \subset \mathbf{R}^3$ e um campo de vetores $X = (X_1, X_2, X_3) : U \rightarrow \mathbf{R}^3$ diferenciável, o divergente de X é definido por

$$\operatorname{div} X = \frac{\partial X_1}{\partial x} + \frac{\partial X_2}{\partial y} + \frac{\partial X_3}{\partial z}.$$

Para uma função de classe C^2 , $f : U \rightarrow \mathbf{R}$ o laplaciano de f é definido por

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

a) Se $f : U \rightarrow \mathbf{R}$ é diferenciável e $X : U \rightarrow \mathbf{R}^3$ é um campo de vetores diferenciável, mostre que

$$\operatorname{div} (fX) = f \operatorname{div} X + \nabla f \cdot X,$$

sendo ∇f o gradiente de f e $\nabla f \cdot X$ o produto interno entre ∇f e X .

(valor: 5,0 pontos)

b) Se $f : U \rightarrow \mathbf{R}$ é de classe C^2 , mostre que $\operatorname{div} (f \nabla f) = f \Delta f + \|\nabla f\|^2$, sendo $\|\cdot\|$ a norma euclidiana.

(valor: 5,0 pontos)

c) Se $U = B = \{x \in \mathbf{R}^3 : \|x\| < 1\}$ e $f : \overline{B} \rightarrow \mathbf{R}$ é de classe C^3 tal que $f(x) > 0$ para qualquer $x \neq 0$, $\operatorname{div} (f \nabla f) = 5f$ e $\|\nabla f\|^2 = 2f$, calcule

$$\int_S \frac{\partial f}{\partial N} dS,$$

onde \overline{B} é o fecho de B , S é a fronteira de B , N é a norma unitária exterior a S , $\frac{\partial f}{\partial N}$ é a derivada direcional de f na direção de N e dS é o elemento de área de S .

(valor: 10,0 pontos)

6

Considere a função real f definida, para $x \geq 0$, por $f(x) = \sqrt{2x}$.

a) Prove que se $0 < x < 2$, então $x < f(x) < 2$.

(valor: 5,0 pontos)

b) Prove que é convergente a sequência definida recursivamente por

$$\text{i) } a_1 = \sqrt{2}$$

$$\text{ii) } a_{n+1} = f(a_n), \text{ para todo } n \geq 1$$

(valor: 5,0 pontos)

c) Calcule $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

(valor: 10,0 pontos)

TERCEIRA PARTE – QUESTÕES DISCURSIVAS ESPECÍFICAS PARA OS FORMANDOS DE LICENCIATURA

A seguir, são apresentadas 6 (seis) questões das quais você deverá responder a apenas 5 (cinco), à sua escolha. Você deve indicar as questões escolhidas nos locais apropriados do Caderno de Respostas. Se você responder a todas as questões, serão corrigidas apenas as 5 (cinco) primeiras.

7

Uma roda-gigante tem 30 metros de diâmetro, completa uma volta em 120 segundos e o embarque dos passageiros se dá no carro situado no ponto mais baixo da roda-gigante, a 2 metros de altura a partir do solo. Considere, ainda, a roda como uma circunferência num plano perpendicular ao plano do solo, o passageiro como um ponto dessa circunferência, o movimento uniforme e o instante do início do movimento como $t = 0$.

- a) Encontre a altura máxima, em relação ao solo, alcançada pelo passageiro durante uma volta completa e a velocidade angular da roda, em radianos por segundo. **(valor: 5,0 pontos)**
- b) É verdadeira a afirmação: “Em quinze segundos, a altura alcançada pelo passageiro é um quarto da altura máxima que ele pode alcançar”? Justifique sua resposta. **(valor: 5,0 pontos)**
- c) Encontre a altura em que o passageiro estará no instante $t = 75s$. **(valor: 5,0 pontos)**
- d) Determine $h(t)$, altura (em relação ao solo) em que se encontra o passageiro no instante t , e esboce o seu gráfico. **(valor: 5,0 pontos)**

8

O ensino de logaritmos apresenta algumas dificuldades metodológicas. Uns preferem construir primeiramente a função exponencial e definir a função logaritmo como inversa da função exponencial, transferindo as dificuldades para a construção da função exponencial. Outros preferem definir logaritmos como áreas, ou seja, como integrais. Adotaremos, nesta questão, a definição de logaritmo neperiano (natural) pela fórmula

$$\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}, \text{ para } x > 0.$$

Dados a e b positivos, prove que:

a) $\int_1^a \frac{dt}{t} = \int_b^{ab} \frac{dt}{t}$ **(valor: 10,0 pontos)**

Sugestão: mudança de variáveis

b) $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$, usando a definição acima. **(valor: 10,0 pontos)**

9

Em um livro texto para a segunda série do ensino médio encontra-se, sem qualquer justificativa, a afirmação abaixo.

“PROPRIEDADES DOS POLIEDROS CONVEXOS

Num poliedro convexo, a soma dos ângulos de todas as faces é dada por $S = (V - 2) \cdot 360^\circ$, onde V é o número de vértices.”

Em seguida, há um exemplo de aplicação dessa fórmula e são propostos exercícios. Entre estes, há um, classificado como de fixação, que tem o seguinte enunciado: “Qual é a soma dos ângulos das faces de um poliedro convexo que tem 12 faces e 15 arestas?” A resposta, dada no final do livro, é: 1080° .

- a) Demonstre que, em um poliedro convexo com V vértices, a soma dos ângulos internos de todas as faces é, de fato, dada por $S = (V - 2) \cdot 360^\circ$. **(valor: 10,0 pontos)**
- b) De acordo com o Teorema de Euler, se existisse um poliedro convexo com 12 faces e 15 arestas, quantos vértices teria? **(valor: 5,0 pontos)**
- c) Prove que o poliedro descrito no item anterior não pode existir. **(valor: 5,0 pontos)**

10

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) sugerem os jogos como uma atraente possibilidade para o ensino da Matemática. Um professor dividiu seus alunos em duplas e propôs a cada dupla o jogo descrito a seguir. O primeiro jogador escolhe um número no conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ e o anuncia. O segundo jogador escolhe um número no mesmo conjunto (pode escolher o mesmo número escolhido pelo primeiro jogador), soma-o ao anunciado pelo primeiro jogador e anuncia a soma. O primeiro jogador escolhe um número no mesmo conjunto, soma-o à soma anunciada por seu adversário e anuncia essa nova soma, e assim por diante. Ganha quem conseguir anunciar a soma 40.

Uma das partidas desenvolveu-se do modo seguinte (P = primeiro jogador, S = segundo jogador):

P: 3
S: $3 + 6 = 9$
P: $9 + 7 = 16$
S: $16 + 4 = 20$
P: $20 + 5 = 25$
S: $25 + 7 = 32$
P: perdi!

- a) Indique três funções do uso dos jogos no ensino da Matemática, de acordo com os PCN. (valor: 5,0 pontos)
- b) Mostre que realmente o primeiro jogador perdeu essa partida. (valor: 5,0 pontos)
- c) Que estratégia deve ser usada por um dos jogadores para ganhar sempre? (valor: 5,0 pontos)
- d) Que conceito matemático pode ser trabalhado a partir desse jogo? (valor: 5,0 pontos)

11

Uma tendência que se nota em alguns livros didáticos recentemente publicados é a apresentação da Geometria (na 5ª série) com o estudo (descritivo) de sólidos e a exploração de conceitos como sólidos redondos (podem rolar, se empurrados) e não redondos. As noções pelas quais se iniciavam Os Elementos (ponto, reta, plano) são apresentadas posteriormente, por exemplo: o plano é apresentado como um conceito abstrato, idealizado a partir de objetos concretos tais como o tampo de uma mesa na qual se apóiam os poliedros, ou as faces de um sólido não redondo.

Informe que sequência você utilizaria para a apresentação desse conteúdo e justifique sua escolha.

12

Uma nova linha no ensino de Geometria vem recebendo o nome de Geometria Dinâmica. Trata-se da utilização de *softwares* de construções geométricas que permitem a transformação de figuras mantendo um certo número de suas propriedades.

- a) Indique o nome de um desses *softwares*, descrevendo duas de suas potencialidades. (valor: 10,0 pontos)
- b) Cite duas vantagens do uso de um desses *softwares* sobre a construção com régua e compasso em papel. (valor: 5,0 pontos)
- c) Apresente um exemplo de propriedade geométrica que possa ser mais bem estudada na “Geometria Dinâmica” do que no ensino sem o computador. (valor: 5,0 pontos)

IMPRESSIONES SOBRE A PROVA

As questões abaixo visam a levantar sua opinião sobre a qualidade e a adequação da prova que você acabou de realizar e também sobre o seu desempenho na prova.

Assinale, nos espaços próprios (parte inferior) do Cartão-Resposta, as alternativas correspondentes à sua opinião e à razão que explica o seu desempenho.

Agradecemos sua colaboração.

41

Qual o ano de conclusão deste seu curso de graduação?

- (A) 2003.
- (B) 2002.
- (C) 2001.
- (D) 2000.
- (E) Outro.

42

Qual o grau de dificuldade desta prova?

- (A) Muito fácil.
- (B) Fácil.
- (C) Médio.
- (D) Difícil.
- (E) Muito difícil.

43

Quanto à extensão, como você considera a prova?

- (A) Muito longa.
- (B) Longa.
- (C) Adequada.
- (D) Curta.
- (E) Muito curta.

44

Para você, como foi o tempo destinado à resolução da prova?

- (A) Excessivo.
- (B) Pouco mais que suficiente.
- (C) Suficiente.
- (D) Quase suficiente.
- (E) Insuficiente.

45

A que horas você concluiu a prova?

- (A) Antes das 14 h 30 min.
- (B) Aproximadamente às 14 h 30 min.
- (C) Entre 14 h 30 min e 15 h 30 min.
- (D) Entre 15 h 30 min e 16 h 30 min.
- (E) Entre 16 h 30 min e 17 h.

46

As questões da prova apresentam enunciados claros e objetivos?

- (A) Sim, todas apresentam.
- (B) Sim, a maioria apresenta.
- (C) Sim, mas apenas cerca de metade apresenta.
- (D) Não, poucas apresentam.
- (E) Não, nenhuma apresenta.

47

Como você considera as informações fornecidas em cada questão para a sua resolução?

- (A) Sempre excessivas.
- (B) Sempre suficientes.
- (C) Suficientes na maioria das vezes.
- (D) Suficientes somente em alguns casos.
- (E) Sempre insuficientes.

48

Com que tipo de problema você se deparou mais freqüentemente ao responder a esta prova?

- (A) Desconhecimento do conteúdo.
- (B) Forma de abordagem do conteúdo diferente daquela a que estou habituado.
- (C) Falta de motivação para fazer a prova.
- (D) Espaço insuficiente para responder às questões.
- (E) Não tive qualquer tipo de dificuldade para responder à prova.

49

Como você explicaria o seu desempenho na prova, de um modo geral?

- (A) Não estudei durante o curso a maioria desses conteúdos.
- (B) Estudei somente alguns desses conteúdos durante o curso, mas não os aprendi bem.
- (C) Estudei a maioria desses conteúdos há muito tempo e já os esqueci.
- (D) Estudei muitos desses conteúdos durante o curso, mas nem todos aprendi bem.
- (E) Estudei e conheço bem todos esses conteúdos.