

# **Exame Nacional de Cursos – 1998**

## **Provas e Questionário**

### **Matemática**



# Prova de Múltipla Escolha



**PARTE A - QUESTÕES OBJETIVAS COMUNS AOS FORMANDOS DE BACHARELADO E DE LICENCIATURA**  
(valor: 100,0 pontos)

1

A altura aproximada de um prédio de 13 andares, em metros, é:

- (A) 20  
(B) 40  
(C) 60  
(D) 80  
(E) 100

2

Uma das afirmativas abaixo sobre números naturais é **FALSA**. Qual é ela?

- (A) Dado um número primo, existe sempre um número primo maior do que ele.  
(B) Se dois números não primos são primos entre si, um deles é ímpar.  
(C) Um número primo é sempre ímpar.  
(D) O produto de três números naturais consecutivos é múltiplo de seis.  
(E) A soma de três números naturais consecutivos é múltiplo de três.

3

Assinale a única afirmativa verdadeira, a respeito de números reais.

- (A) A soma de dois números irracionais é sempre um número irracional.  
(B) O produto de dois números irracionais é sempre um número racional.  
(C) Os números que possuem representação decimal periódica são irracionais.  
(D) Todo número racional tem uma representação decimal finita.

(E) Se a representação decimal infinita de um número é periódica, então esse número é racional.

4

A pressão da água do mar varia com a profundidade. Sabe-se que a pressão da água ao nível do mar é de 1 atm (atmosfera), e que a cada 5m de profundidade a pressão sofre um acréscimo de 0,5 atm.

A expressão que dá a pressão  $p$ , em atmosferas, em função da profundidade  $h$ , em metros, é:

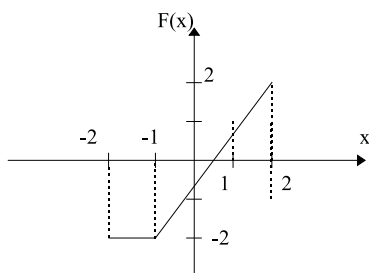
- (A)  $p = 1 + 0,5 h$   
(B)  $p = 1 + 0,1 h$   
(C)  $p = 1 - 0,5 h$   
(D)  $p = 0,5 h$   
(E)  $p = 0,1 h$

5

O período da função  $f(x) = 2 \cos(3x + \pi/5) - 1$  é:

- (A)  $\pi/5$   
(B)  $\pi/3$   
(C)  $2\pi/3$   
(D) 3  
(E)  $\pi$

6



Sendo a função  $F$ , definida em  $[-2, 2]$ , representada no gráfico acima, pode-se afirmar que a função:

- (A)  $G(x) = F(x) + 1$  é positiva em todo o domínio.  
(B)  $H(x) = F(x) - 1$  é negativa em todo o domínio.  
(C)  $S(x) = -F(x)$  é positiva entre  $-1$  e  $0$ .  
(D)  $S(x) = -F(x)$  é negativa entre  $0$  e  $1$ .  
(E)  $M(x) = |F(x)|$  é negativa quando  $F(x)$  é negativa.

7

Se  $x^2 \geq 1$ , então:

- (A)  $x \geq \pm 1$   
(B)  $x = \pm 1$   
(C)  $x \geq 1$   
(D)  $x \geq 1$  ou  $x \leq -1$   
(E)  $x \leq 1$  e  $x \geq -1$

8

Um aluno deu a solução seguinte para a inequação abaixo:

- $$\frac{(x+3)(x-2)}{x-1} > x \quad (1)$$
- $$(x+3)(x-2) > x^2 - x \quad (2)$$
- $$x^2 + x - 6 > x^2 - x \quad (3)$$
- $$x - 6 > -x \quad (4)$$
- $$2x > 6 \quad (5)$$
- $$x > 3 \quad (6)$$

Mas 0, por exemplo, satisfaz a inequação (1) e não é maior do que 3. Assim, houve um erro na passagem de:

- (A) (1) para (2)  
(B) (2) para (3)  
(C) (3) para (4)  
(D) (4) para (5)  
(E) (5) para (6)

9

Anulada.

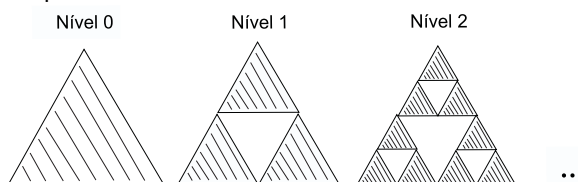
10

A soma de todos os múltiplos de 6 que se escrevem (no sistema decimal) com dois algarismos é:

- (A) 612  
(B) 648  
(C) 756  
(D) 810  
(E) 864

11

A figura abaixo mostra uma sequência de triângulos de Sierpinski.



O processo começa no nível zero, com um triângulo equilátero de área 1. Em cada passo a seguir, cada triângulo equilátero é dividido através dos segmentos que ligam os pontos médios dos seus lados e é eliminado o triângulo central assim formado.

A área que resta no nível  $n$  (indicada nas figuras pelo sombreado) é dada por:

(A)  $1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n$

**(B)  $\left(\frac{3}{4}\right)^n$**

(C)  $\left(\frac{1}{4}\right)^n$

(D)  $1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n$

(E)  $\left(\frac{1}{2}\right)^n$

12

O resto da divisão de  $12^{12}$  por 5 é:

(A) 0

**(B) 1**

(C) 2

(D) 3

(E) 4

13

Considerando o sistema

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y + z = 2 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$

é correto afirmar que em  $\mathbb{R}^3$ :

(A) a solução do sistema representa uma reta.

**(B) a solução do sistema representa um ponto.**

(C) a solução do sistema representa um plano.

(D) a primeira equação representa uma reta.

(E) as duas últimas equações representam planos paralelos.

14

O sistema  $\begin{cases} ax + 3y = a \\ 3x + ay = -a \end{cases}$  não tem solução se e só se:

(A)  $a \neq -3$

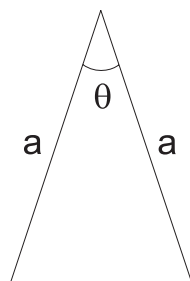
(B)  $a \neq 3$

(C)  $a = 0$

(D)  $a = -3$

**(E)  $a = 3$**

15



A área do triângulo isósceles da figura acima é:

**(A)  $\frac{a^2}{2} \sin \theta$**

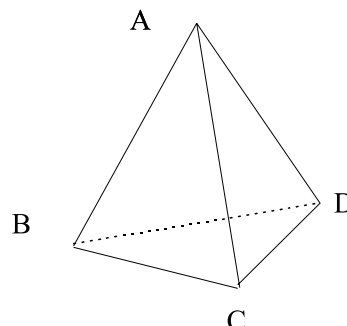
(B)  $\frac{a^2}{2} \sin \frac{\theta}{2}$

(C)  $\frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$

(D)  $\frac{2a^2}{\sin \theta}$

(E)  $2a^2 \sin \frac{\theta}{2}$

16



Na figura acima, ABCD é um tetraedro regular. Considere R o ponto médio de BC e S o ponto médio de AD e assinale a afirmativa **FALSA**, a respeito dessa figura.

(A) AR é altura do triângulo ABC.

(B) RS é altura do triângulo ARD.

(C) RS é mediana do triângulo BSC.

(D) O triângulo BSC é isósceles.

**(E) O triângulo ARD é equilátero.**

17

Sobre polígonos semelhantes, assinale a única afirmativa verdadeira.

(A) Todos os quadriláteros que possuem os 4 lados iguais entre si são semelhantes.

(B) Dois quadriláteros que possuem os lados respectivamente proporcionais são semelhantes.

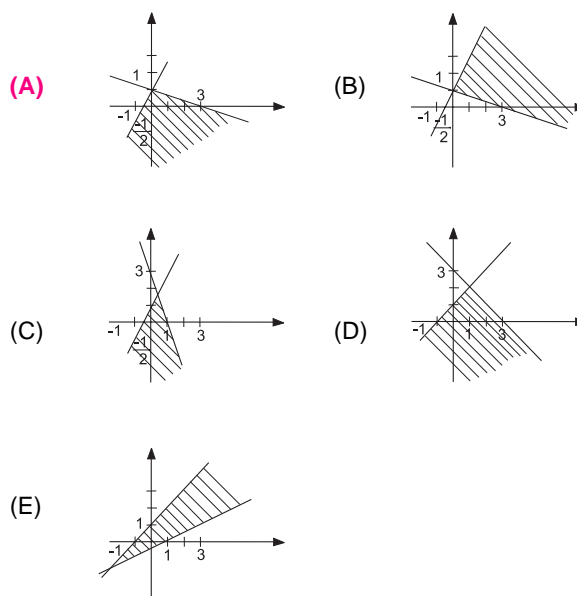
(C) Dois retângulos são sempre semelhantes.

(D) Se os lados de dois pentágonos são respectivamente paralelos, então eles são semelhantes.

**(E) Se os lados de dois triângulos são respectivamente paralelos, então eles são semelhantes.**

18

A região do plano definida por:  $y < 2x + 1$  e  $3y < 3 - x$  é:



19

O valor de  $k \in \mathbf{R}$  para o qual a reta  $y=kx+1$  é perpendicular à reta de equações  $\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -t - 3 \end{cases}$  é:

- (A) -2 (B) -1 (C) 1 (D) 2 (E) 3

20

Os clientes de um banco devem escolher uma senha, formada por 4 algarismos de 0 a 9, de tal forma que não haja algarismos repetidos em posições consecutivas (assim, a senha "0120" é válida, mas "2114" não é). O número de senhas válidas é:

- (A) 10.000  
(B) 9.000  
(C) 7.361  
(D) 7.290  
(E) 8.100

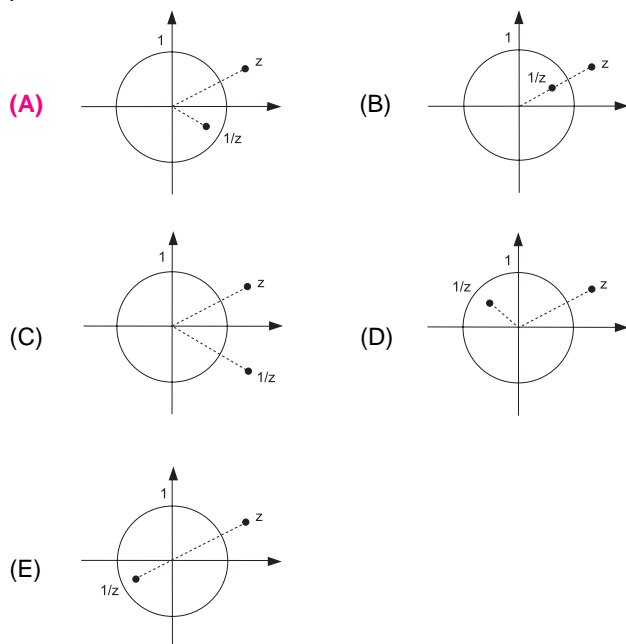
21

Quatro atiradores atiram simultaneamente em um alvo. Qual a probabilidade aproximada de o alvo ser atingido, sabendo-se que cada atirador acerta, em média, 25% de seus tiros?

- (A) 100%  
(B) 75%  
(C) 68%  
(D) 32%  
(E) 25%

### Questão nº 22

Assinale a opção que melhor representa um número complexo  $z$  e seu inverso  $1/z$ .



23

O lugar geométrico dos pontos  $z$  do plano complexo tais que a parte imaginária de  $z^2$  é igual a 1 é um(a):

- (A) ponto. (B) reta.  
(C) circunferência. (D) parábola.  
(E) hipérbole.

24

O número de raízes reais da equação  $3x^7 + 2 = 0$  é:

- (A) 0 (B) 1  
(C) 2 (D) 7  
(E) uma infinidade

25

O resto da divisão do polinômio  $9x^9 + 6x^6 + 3x^3 + 1$  por  $x + 1$  é:

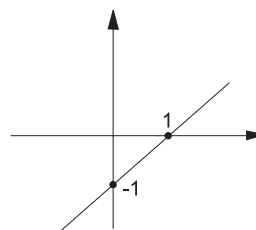
- (A) -19 (B) -5 (C) 0 (D) 5 (E) 19

26

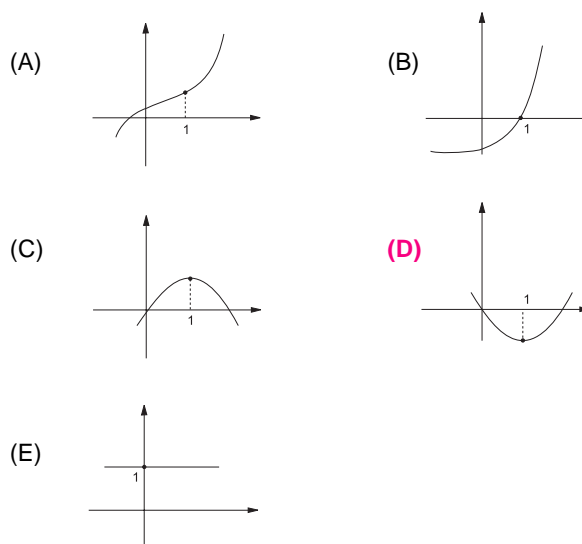
O número complexo  $2+i$  é raiz do polinômio  $P(x)$ , de coeficientes reais. Pode-se garantir que  $P(x)$  é divisível por:

- (A)  $2x + 1$  (B)  $x^2 + 1$   
(C)  $x^2 + x - 1$  (D)  $x^2 - 2x - 1$   
(E)  $x^2 - 4x + 5$

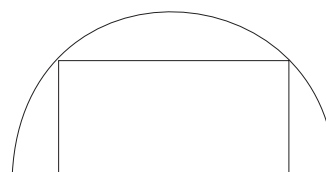
27



O gráfico acima é o da derivada  $f'$  de uma função  $f$ . Um gráfico possível para  $f$  é:



28



A área máxima que pode ter um retângulo inscrito em um semicírculo de raio 1, como o da figura acima, é:

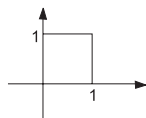
- (A) 1/2 (B) 2/3 (C) 1 (D) 3/2 (E) 2

29

Dada a função  $F(x) = \int_0^x e^{-t} dt$ , a sua derivada  $F'(x)$  é:

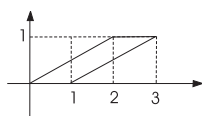
- (A)  $1 - e^x$   
 (B)  $1 - e^{-x}$   
 (C)  $-e^{-x}$   
**(D)  $e^{-x}$**   
 (E)  $e^x - 1$

30

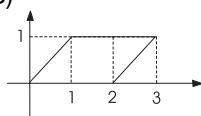


A transformação  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é definida por  $T(x,y) = (x + 2y, y)$ . A imagem, por  $T$ , do quadrado representado na figura acima é:

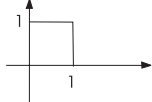
(A)



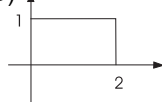
(B)



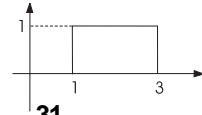
(C)



(D)



(E)



31

Seja  $P$  a transformação de  $\mathbb{R}^3$  em  $\mathbb{R}^3$ , definida por  $P(x,y,z) = (x,y,0)$ .

Se a imagem de uma reta  $r$ , por  $P$ , é um ponto, então:

- (A) esta reta  $r$  é paralela a  $OX$ .  
 (B) esta reta  $r$  é paralela a  $OY$ .  
**(C) esta reta  $r$  é paralela a  $OZ$ .**  
 (D) esta reta  $r$  necessariamente contém a origem.  
 (E) não existe tal reta  $r$ .

32

Chama-se **núcleo** de uma transformação linear  $T$  o conjunto dos pontos cuja imagem por  $T$  é nula. O núcleo da transformação linear  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , definida por  $T(x, y, z) = (z, x - y, -z)$ , é o subespaço do  $\mathbb{R}^3$  gerado por:

- (A)  $\{(0,0,0)\}$   
 (B)  $\{(0,1,0)\}$   
 (C)  $\{(1,0,-1)\}$   
**(D)  $\{(1,1,0)\}$**   
 (E)  $\{(1,0,1), (0,1,0)\}$

33

Uma curva é tal que a tangente em cada um de seus pontos é perpendicular à reta que liga o ponto à origem. A curva satisfaz, então, a equação diferencial:

- (A)  $y' = -x/y$**  (B)  $y' = x/y$   
 (C)  $y' = y/x$  (D)  $y' = -y/x$   
 (E)  $y' = 1/y$

34

Considere as afirmativas abaixo.

- I - Todo corpo é um domínio de integridade.  
 II - Todo domínio de integridade é um corpo.  
 III - Todo subanel de um anel é um ideal deste mesmo anel.  
 IV - Todo ideal de um anel é um subanel deste mesmo anel.

As afirmativas verdadeiras são:

- (A) apenas I e III. **(B) apenas I e IV.**  
 (C) apenas II e III. (D) apenas II e IV.  
 (E) apenas III e IV.

35

Quando  $n \rightarrow \infty$ , a sequência de termo geral

$$a_n = \frac{n^5 + 2^n}{n^4 + 3^n} \text{ tem limite:}$$

- (A) 0** (B)  $2/3$  (C) 1 (D)  $5/4$   
 (E)  $\infty$

36

Seja  $(a_n)$  uma sequência de números reais e seja  $(s_n)$  a sequência definida por  $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ . Considere as afirmativas abaixo:

- I - se  $(s_n)$  é convergente, então  $\lim a_n = 0$ ;  
 II - se  $\lim a_n = 0$ , então  $(s_n)$  é convergente;  
 III - se  $(a_n)$  é limitada, então  $(s_n)$  é limitada.

A(s) afirmativa(s) verdadeira(s) é(são):

- (A) apenas I.** (B) apenas III.  
 (C) apenas I e II. (D) apenas II e III.  
 (E) I, II e III.

37

Seja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua. Dado um subconjunto  $S$  de  $\mathbb{R}$ , seja  $f(S) = \{f(x) \mid x \in S\}$ .

Considere as afirmativas:

- I - se  $J$  é um intervalo, então  $f(J)$  é um intervalo;  
 II - se  $J$  é um intervalo aberto, então  $f(J)$  é um intervalo aberto;  
 III - se  $J$  é um intervalo fechado e limitado, então  $f(J)$  é um intervalo fechado e limitado.

Está(ão) correta(s) a(s) afirmativa(s):

- (A) I apenas.
- (B) III apenas.
- (C) I e II apenas.
- (D) I e III apenas.**
- (E) I, II e III.

38

Considere o trecho de programa abaixo.

```

n ← 1
s ← 0
repita as duas instruções a seguir
    s ← s + 1/n
    n ← n + 1
até que n > 10
escreva s
    
```

(Observação: a notação

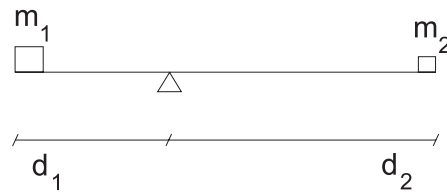
$s \leftarrow \text{expressão}$

significa que o valor da variável s é substituído pelo resultado da expressão).

O valor escrito no final do programa é:

- (A)  $\frac{1}{10!}$
- (B)  $\frac{1}{\sum_{n=1}^{10} \frac{1}{n}}$
- (C)  $\sum_{n=1}^{10} \frac{1}{n!}$
- (D)  $\sum_{n=1}^{10} \frac{1}{n}$**
- (E)  $\sum_{n=1}^{10} \frac{1}{n^{10}}$

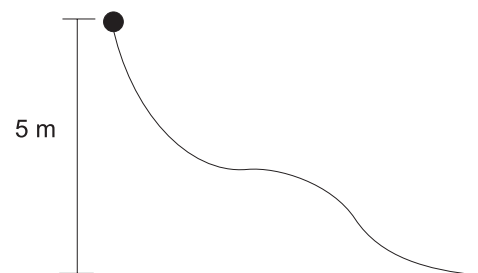
39



O sistema da figura acima está em equilíbrio. Entre as massas  $m_1$  e  $m_2$  dos blocos e suas distâncias  $d_1$  e  $d_2$  ao ponto de apoio existe a relação:

- (A)  $\frac{m_1}{d_1} = \frac{m_2}{d_2}$
- (B)  $\frac{m_1}{d_1^2} = \frac{m_2}{d_2^2}$
- (C)  $\frac{m_1}{\sqrt{d_1}} = \frac{m_2}{\sqrt{d_2}}$
- (D)  $m_1 d_1 = m_2 d_2$**
- (E)  $m_1 d_1^2 = m_2 d_2^2$

40



Uma partícula é colocada, sem velocidade inicial, no topo da rampa indicada na figura acima. Após deslizar, sem atrito, ela chega ao final da rampa com velocidade de módulo v. A respeito desta situação, assinale a opção correta (use  $g = 10 \text{ m/s}^2$ ).

- (A) v não pode ser determinada, pois depende da massa da partícula.
- (B) v não pode ser determinada, pois depende da forma da trajetória.
- (C) v é igual a 2,5 m/s.
- (D) v é igual a 5 m/s.
- (E) v é igual a 10 m/s.**

# **Prova Discursiva**





Responda às **10 (dez)** questões discursivas, todas de mesmo valor, totalizando **100 (cem) pontos**, a tinta azul ou preta, nos espaços próprios das páginas do Caderno de Respostas. Observe que as questões de números 1 a 5 são comuns a todos os formandos e que as questões de números 6 a 10 são diferentes para os formandos de Bacharelado e de Licenciatura. O espaço disponível para desenvolvimento, resposta e eventuais rascunhos é **SUFICIENTE**. **NÃO** serão fornecidas folhas adicionais. Os rascunhos não serão considerados na correção.

## PARTE B

### QUESTÕES ABERTAS COMUNS AOS FORMANDOS DE BACHARELADO E DE LICENCIATURA

#### Questão nº 1

Em uma certa cidade, o preço de uma corrida de táxi é calculado do seguinte modo: (i) a “bandeirada” é R\$2,50; (ii) durante os primeiros 10km, o preço da corrida é de R\$0,80 por km; (iii) daí por diante, o preço da corrida passa a ser de R\$1,20 por km. Para uma corrida de até 30km,  $f(x)$  designa o preço total da corrida que começou no km 0 e acabou no km  $x$ . Suponha que  $x$  varie continuamente no conjunto dos números reais.

- Expresse  $f(x)$  algebricamente.
- Calcule o preço de uma corrida de 30km.
- Faça um esboço do gráfico de  $y=f(x)$ .

(valor: 20,0 pontos)

#### Comentários

#### Conteúdos estabelecidos na questão:

Funções Reais; Propriedades e gráficos; função afirm.

#### Habilidades aferidas:

Capacidade de: integrar vários campos da Matemática para elaborar modelos, resolver problemas e interpretar dados; e interpretação e representação gráfica.

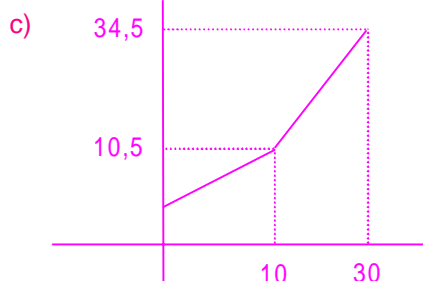
#### Padrão de Resposta Esperado:

$$a) \quad f(x) = \begin{cases} 2,5 + 0,8x, & \text{se } 0 \leq x \leq 10 \\ -1,5 + 1,2x, & \text{se } 10 \leq x \leq 30 \end{cases}$$

$$b) \quad 2,50 + (10 \times 0,80) + (20 \times 1,20) = \text{R\$ } 34,50$$

ou

$$f(30) = -1,5 + 1,2 \cdot 30 = \text{R\$ } 34,50$$



#### Questão nº 2

O losango é um quadrilátero que tem os quatro lados iguais. A partir desta definição, pode-se demonstrar a seguinte afirmação: “ter diagonais perpendiculares é uma condição **necessária** para que um quadrilátero seja um losango.”

- Enuncie esta afirmação sob a forma de um teorema do tipo “Se... então...”.
- Demonstre o teorema enunciado no item a).
- Enuncie a recíproca do teorema enunciado no item a) e decida se ela é ou não verdadeira, justificando a sua resposta.

#### Dados/Informações adicionais:

O teorema sobre os ângulos formados por duas paralelas cortadas por uma transversal pode ser considerado conhecido, bem como os casos de congruência de triângulos. (valor: 20,0 pontos)

#### Comentários

#### Conteúdos estabelecidos na questão:

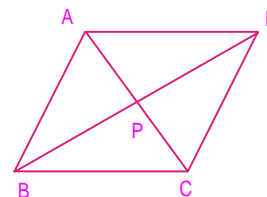
Geometria Plana.

#### Habilidades aferidas:

Capacidade de: analisar criticamente textos matemáticos e redigir formas alternativas.

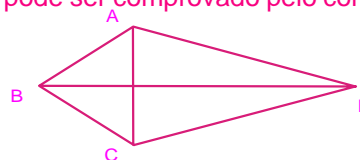
#### Padrão de Resposta Esperado:

- Um enunciado pode ser: “Se um quadrilátero é um losango então esse quadrilátero tem as diagonais perpendiculares”.
- A igualdade dos lados acarreta a congruência dos triângulos isósceles ABD e CDB, pelo caso LLL. Daí, tem-se:  
 $\angle ABD = \angle DBC = \angle CDB = \angle BDA$ .  
Raciocínio análogo para os triângulos ABC e ADC implica:  
 $\angle CAB = \angle BCA = \angle ACD = \angle DAC$ .



Aplica-se então o caso ALA de congruência aos triângulos PAB e PAD. Assim,  $\triangle PAB = \triangle PAD$  e portanto  $\angle APB = \angle APD$ . Como a soma desses ângulos é um ângulo raso, cada um deles será reto, ou seja  $AC \perp BD$ .

- A recíproca do teorema pode ser enunciada assim: “Se um quadrilátero tem diagonais perpendiculares então esse quadrilátero é um losango.” Ela é falsa, como pode ser comprovado pelo contra-exemplo:



### Questão nº 3

Seja  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  a função dada por  $f(x) = \sqrt[5]{x}$ .

a) Calcule a equação da reta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto de abscissa  $x = 1$ .

b) Calcule um valor aproximado de  $\sqrt[5]{1,09}$ , utilizando o item a).

(valor: 20,0 pontos)

#### Comentários

##### Conteúdos estabelecidos na questão:

Cálculo diferencial de uma variável.

##### Habilidades aferidas:

Capacidade de: trato no sentido numérico e interpretação geométrica de derivada.

#### Padrão de Resposta Esperado:

a)

$$f'(x) = \frac{1}{5} \frac{1}{\sqrt[5]{x^4}}; f'(1) = \frac{1}{5}$$

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 1 = \frac{1}{5}(x - 1) \Rightarrow y = \frac{1}{5}x + \frac{4}{5}$$

b)

$$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot h$$

$$\sqrt[5]{1,09} \approx \sqrt[5]{1} + \frac{1}{5} \cdot 0,09 = 1 + 0,018 = 1,018$$

### Questão nº 4

Considere a seqüência  $\sqrt{2}, \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}, \dots$  definida por  $a_1 = \sqrt{2}$  e  $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ , para  $n \geq 1$ . Mostre que  $a_n < 2$  para todo  $n \geq 1$ .

Sugestão: Utilize o Princípio da Indução Finita.

(valor: 20,0 pontos)

#### Comentários

##### Conteúdos estabelecidos na questão:

Teoria de números, indução matemática.

##### Habilidades aferidas:

Capacidade de: compreender e elaborar argumentação matemática.

#### Padrão de Resposta Esperado:

A afirmativa  $a_n < 2$  é válida para  $n = 1$ , já que  $\sqrt{2} < 2$ . Suponhamos a afirmativa válida para  $n$ . Isto é,  $a_n < 2$ . Então:

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} < \sqrt{2 + 2} = \sqrt{4} = 2.$$

Logo, a afirmativa também é válida para  $n + 1$ . Assim, pelo Princípio da Indução da Finita,  $a_n < 2$  para todo  $n \geq 1$ .

### Questão nº 5

A matriz  $M = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$  é ortogonal e possui determinante igual a 1.

Por esta razão, ela representa, na base canônica do  $\mathbf{R}^3$ , uma rotação  $S$  em torno de um eixo, contendo a origem, cuja direção é dada por um autovetor  $\mathbf{v}$  com autovalor 1. Determine um vetor não nulo  $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^3$  na direção do eixo de rotação de  $S$ .

(valor: 20,0 pontos)

#### Comentários

##### Conteúdos estabelecidos na questão:

Álgebra linear: vetores e matrizes, Transformações lineares, Autovetores e autovalores; Transformações ortogonais e isometrias do plano.

##### Habilidades aferidas:

Capacidade de: Integrar vários campos da Matemática para elaborar modelos, resolver problemas e interpretar dados.

#### Padrão de Resposta Esperado:

O vetor  $\mathbf{v} = (x_1, x_2, x_3)$  desejado satisfaz  $M\mathbf{v} = \mathbf{v}$ . Ou seja:

$$\begin{cases} -\frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 = x_1 \\ -\frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_3 = x_2 \\ -\frac{2}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = x_3 \end{cases} \quad \begin{cases} -\frac{4}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 = 0 \\ -\frac{2}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_3 = 0 \\ -\frac{2}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_3 = 0 \end{cases}$$

O sistema homogêneo acima tem solução não trivial, já que as duas últimas equações são iguais. O sistema é equivalente a (após simplificar):

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Ou, em termos matriciais, à matriz escalonada:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Resolvendo, obtém-se:

$$x_1 = 0 \text{ e } x_2 = -x_3$$

Uma solução não nula é dada, por exemplo, por  $v = (0, 1, -1)$ .

## PARTE C - QUESTÕES ABERTAS ESPECÍFICAS PARA OS FORMANDOS DE BACHARELADO

(valor: 100,0 pontos)

### Questão nº 6

Seja  $R$  uma região do plano que satisfaz as condições do Teorema de Green.

a) Mostre que a área de  $R$  é dada por  $\frac{1}{2} \int_{\partial R} x dy - y dx$

b) Use o item a) para calcular a área da elipse de equações  $\begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = b \sin \theta \end{cases}$  (valor: 20,0 pontos)

onde  $a > 0$  e  $b > 0$  são fixos, e  $0 \leq \theta \leq 2\pi$

#### Dados/Informações adicionais:

Teorema de Green: Seja  $R$  uma região do plano com interior não vazio e cuja fronteira  $\partial R$  é formada por um número finito de curvas fechadas, simples, disjuntas e de classe  $C^1$  por partes. Sejam  $L(x, y)$  e  $M(x, y)$  funções de classe  $C^1$  em  $R$ .

$$\text{Então } \iint_R \left( \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial R} L dx + M dy$$

#### Comentários

#### Conteúdos estabelecidos na questão:

Integrais de linha e Teorema de Green.

#### Habilidades aferidas:

Capacidade de: Integrar vários campos da Matemática para resolver problemas.

#### Padrão de Resposta Esperado:

a) Tomando-se  $L(x, y) = x$  e  $M(x, y) = -y$  no Teorema de Green obtém-se:

$$\frac{1}{2} \int_{\partial R} x dy - y dx = \frac{1}{2} \iint_R 2 dA = \iint_R 1 dA = \text{área de } R.$$

b) Usando-se a parametrização dada da elipse, tem-se:

$$\text{área} = \frac{1}{2} \int_{\partial R} x dy - y dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) d\theta = \pi \cdot ab$$

### Questão nº 7

Resolva a equação diferencial

$$y''' - 4y'' + 4y' = e^x$$

onde:

$$y' = \frac{dy}{dx}; \quad y'' = \frac{d^2y}{dx^2}; \quad y''' = \frac{d^3y}{dx^3}$$

(valor: 20,0 pontos)

#### Comentários

#### Conteúdos estabelecidos na questão:

Equações diferenciais.

#### Habilidades aferidas:

Capacidade de: Resolução de equações.

Solução da equação homogênea  $y''' - 4y'' + 4y' = 0$ :

$$y = A + B \cdot e^{2x} + C \cdot x \cdot e^{2x}$$

Solução particular:  $y_p = e^x$

Solução Geral:  $y = e^x + A + B e^{2x} + C x e^{2x}$ ,  $A, B, C \in \mathbb{R}$ .

Obs.: Esta equação diferencial de 3ª ordem pode também ser resolvida como equação de 2ª ordem, através da substituição:  $y' = z$ .

#### Padrão de Resposta Esperado:

Solução da equação característica  $m^3 - 4m^2 + 4m = 0$ :

$m = 0$  ou  $m = 2$  (multiplicidade 2)

### Questão nº 8

Prove que se uma sequência de funções  $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}$  converge uniformemente para  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  e cada  $f_n$  é contínua no ponto  $a \in D$ , então  $f$  é contínua no ponto  $a$ .

#### Dados/Informações adicionais:

Uma sequência de funções  $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}$  converge uniformemente para  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  se para todo  $\epsilon > 0$  dado existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$  para todo  $x \in D$ .

(valor: 20,0 pontos)

### Comentários

#### Conteúdos estabelecidos na questão:

Seqüências e séries de funções, convergência uniforme.

#### Habilidades aferidas:

Capacidade de: Compreender e elaborar argumentação Matemática

#### Padrão de Resposta Esperado:

Para mostrar que a função é contínua, devemos mostrar que:

Dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que,

$$\forall x \in D, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

Pela desigualdade triangular temos que:

$$|f(x) - f(a)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f_n(x) - f_n(a)| + |f_n(a) - f(a)|$$

Como  $f_n$  converge para  $f$  uniformemente, podemos afirmar que, dado  $\frac{\epsilon}{3}$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3} \text{ para todo } x \text{ em } D$$

Como cada  $f_n$  é contínua no ponto  $a$ , temos que, para

$$n > n_0 \text{ e } x \in D, |x - a| < d \Rightarrow |f_n(x) - f_n(a)| < \frac{\epsilon}{3}$$

Portanto, se  $|x - a| < \delta$ , teremos:

$$|f(x) - f(a)| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon,$$

o que mostra que  $f$  é contínua no ponto  $a$ .

### Questão nº 9

Seja  $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$  a curva  $\gamma(\theta) = e^{i\theta}$

Calcule  $\int_{\gamma} \frac{1}{z - z_0} dz$  nos seguintes casos:

a)  $z_0 = \frac{1}{2}(1 + i)$

b)  $z_0 = 2(1 + i)$

(valor: 20,0 pontos)

### Comentários

#### Conteúdos estabelecidos na questão:

Funções de variáveis complexas.

#### Habilidades aferidas:

Capacidade de: Aplicação de um teorema.

#### Padrão de Resposta Esperado:

a) Pela Fórmula Integral de Cauchy obtemos

$$1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z - z_0} dz, \text{ de onde } \int_{\gamma} \frac{1}{z - z_0} dz = 2\pi i$$

Também pode ser calculado pela definição, usando um círculo  $C$  de centro  $z_0$  e raio conveniente, observando que

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z - z_0} dz = \int_C \frac{1}{z - z_0} dz = \int_0^{2\pi} i d\theta = 2\pi i$$

b) Como  $z_0$  é exterior a  $\gamma$  segue que

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z - z_0} dz = 0$$

### Questão nº 10

Sejam  $\alpha$  um número algébrico de grau  $n$  e  $\beta = b_0 + b_1\alpha + \dots + b_{n-1}\alpha^{n-1}$  um elemento não nulo no corpo  $\mathbb{Q}(\alpha)$ , i.e., os coeficientes  $b_i$  são racionais,  $0 \leq i \leq n-1$ , e, pelo menos, um deles é diferente de zero.

a) Prove que  $\frac{1}{\beta}$  é um polinômio em  $\alpha$ .

b) Racionalize a fração  $\frac{1}{2 + \sqrt[3]{2}}$ .

(valor: 20,0 pontos)

**Comentários**

Extensão de corpos, Números algébricos.

**Conteúdos estabelecidos na questão:**

Capacidade de: compreender e elaborar argumentação matemática, trabalhar com conceitos matemáticos abstratos na resolução de problema, trato no sentido numérico.

**Padrão de Resposta Esperado:**

a) Todo elemento de  $Q(\alpha)$  se escreve de modo único na forma  $c_0 + c_1 \alpha + \dots + c_{n-1} \alpha^{n-1}$ . Em particular,

$\frac{1}{\beta}$ , que pertence a  $Q(\alpha)$ .

Se  $f(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_{n-1} x^{n-1}$  ( $\beta = f(\alpha)$ ), então, sendo  $\beta \neq 0$ ,  $f(x)$  é relativamente primo com o polinômio minimal (irredutível) de  $\alpha$ ,  $p(x)$ .

Uma maneira de se obter  $\frac{1}{\beta}$  como um polinômio de  $\alpha$  pode ser a seguinte:

$1 = f(x) \cdot g(x) + p(x) \cdot h(x)$ , que implica  $\frac{1}{\beta} = g(\alpha)$ .

b) Usando (a),  $g(x) = \frac{1}{10} (x^2 - 2x + 4) \therefore \frac{1}{2 + \sqrt[3]{2}} =$

$$\frac{1}{10} (\sqrt[3]{4} - 2\sqrt[3]{2} + 4)$$

## PARTE C - QUESTÕES ABERTAS ESPECÍFICAS PARA OS FORMANDOS DE LICENCIATURA

(valor: 100,0 pontos)

### Questão nº 6

Um professor, ao preparar uma prova para duas turmas de 6ª série, resolveu dar o mesmo problema, mudando apenas os dados numéricos.

Assim, apresentou as formulações abaixo.

**Turma A:** Com 4 litros de leite, uma babá de uma creche faz 18 mamadeiras iguais. Quantas mamadeiras iguais a essas ela faria com 8 litros de leite?

**Turma B:** Com 4 litros de leite, uma babá de uma creche faz 18 mamadeiras iguais. Quantas mamadeiras iguais a essas ela faria com 10 litros de leite?

Em termos de nível de dificuldade, as duas formulações são equivalentes? Justifique sua resposta.

(valor: 20,0 pontos)

#### Comentários

##### Conteúdos estabelecidos na questão:

Avaliação e educação matemática: forma e instrumentos.

##### Habilidades aferidas:

Capacidade de: Analisar criticamente textos matemáticos, trato no sentido numérico.

#### Padrão de Resposta Esperado:

Embora os dois problemas estejam em um mesmo contexto, o problema B é bem mais difícil para os alunos do que o A, isto porque o número de litros de leite no problema A passa de 4 para 8, que é o seu dobro (um múltiplo natural muito simples). Já no problema B, a quantidade de leite passa de 4 litros para 10 litros. Ora, para se obter 10 a partir de 4, por multiplicação, deve-se multiplicar 4 por  $5/2$ , que é um número racional fracionário. Isto é fator de dificuldade para os alunos.

### Questão nº 7

Observe as duas soluções apresentadas para a questão:

"Determine  $p$  para que 2 seja raiz da equação  $x^2 - 4x + p = 0$ ".

**Solução A:** Substituindo  $x=2$  na equação, tem-se

$$4 - 8 + p = 0, \text{ logo } p = 4.$$

**Solução B:** Resolvendo a equação:

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4p}}{2}$$

$$x = 2 \pm \sqrt{4 - p}$$

Igualando  $x$  a 2, tem-se:

$$4 - p = 0, \text{ logo } p = 4.$$

Analise estas soluções sob o ponto de vista de um professor que quer avaliar o nível de compreensão da noção de raiz de uma equação.

(valor: 20,0 pontos)

#### Comentários

##### Conteúdos estabelecidos na questão:

Avaliação e Educação Matemática: formas e instrumentos.

##### Habilidades aferidas:

Capacidade de: Trabalhar com conceitos abstratos.

#### Padrão de Resposta Esperado:

A solução A reflete a compreensão completa na noção de raiz de uma equação como o valor da incógnita que torna verdadeira a igualdade, o que pode ser generalizado para qualquer tipo de equação. Já a solução B põe em jogo apenas a técnica de resolução da equação pela fórmula, que é específica para equação do 2º grau, sem explicitar o significado do resultado obtido.

### Questão nº 8

Ao perceber que um aluno efetuou uma adição de frações adicionando numeradores e denominadores, dois professores agiram da seguinte forma:

- o professor A corrigiu a tarefa cuidadosamente no quadro, usando a redução ao mesmo denominador;
- o professor B, inicialmente, propôs a esse aluno que efetuasse:  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$  e comparasse o resultado obtido com cada uma das parcelas.

Analise os procedimentos dos professores A e B frente ao erro cometido pelo aluno.

(valor: 20,0 pontos)

#### Comentários

##### Conteúdos estabelecidos na questão:

Análise de procedimentos pedagógicos.

##### Habilidades aferidas:

Capacidade de: Trato no sentido numérico.

##### Padrão de Resposta Esperado:

O procedimento do professor B favorece a aprendizagem significativa, enquanto o professor A, apenas repetindo o procedimento correto, não leva o aluno a compreender o erro que estava cometendo. Se o aluno tem em sua mente uma idéia que julga verdadeira, não se dispõe a substituí-la pela que o professor apresenta. Ao executar a tarefa proposta pelo professor B, o aluno observará por si mesmo o absurdo da sua estratégia, e se interessará por aprender a correta.

### Questão nº 9

Você está conduzindo um curso para uma das últimas séries do Ensino Fundamental, e vai começar o assunto “Áreas das figuras planas”. Para iniciar com um exemplo sugestivo, você fez com que seus alunos desenhasssem um retângulo com dimensões de 7cm e 5cm e pesquisassem o número de quadrados unitários (de  $1\text{cm}^2$ ) em que se pode decompor o retângulo dado. Todos perceberam que, dividindo o lado maior em 7 segmentos e o lado menor em 5 segmentos de 1cm, e traçando paralelas aos lados, o retângulo ficava decomposto em  $7 \times 5 = 35$  quadrados unitários e, portanto, sua área era de  $35\text{cm}^2$ . Algumas experiências mais com outros números inteiros positivos e, finalmente, com inteiros positivos genéricos  $a$  e  $b$ , convenceram a todos de que a área de um retângulo é dada (em  $\text{cm}^2$ ) pela fórmula  $a \times b$ , quando os lados não paralelos têm medidas  $a$  e  $b$  (em cm).

Na aula seguinte, um aluno pergunta: "E o que acontecerá se os lados do retângulo medirem 3,6cm e 6,2cm?".

Como você lidaria com esta pergunta?

(valor: 20,0 pontos)

#### Comentários

##### Conteúdos estabelecidos na questão:

Organização dos conteúdos de Matemática na sala de aula e Metodologia do ensino da Matemática.

##### Habilidades aferidas:

Capacidade de: Compreender e elaborar argumentação Matemática; Discorrer sobre conceitos matemáticos, definições, teoremas, exemplos, propriedades; comunicações; idéias e técnicas matemáticas.

##### Padrão de Resposta Esperado:

A partir do exemplo dado pelo aluno, alteramos a unidade de medida de cm para mm. o retângulo pode ser dividido em  $36 \times 62 = 2232$  quadrados de 1mm de lado, ou seja, sua área é de  $2.232\text{mm}^2$ . como o  $\text{cm}^2$  contém  $100\text{mm}^2$ , isso é equivalente a  $22,32\text{cm}^2$ .



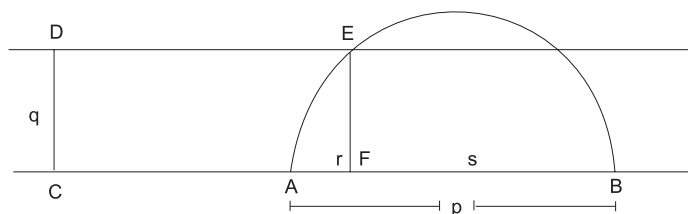
### Questão nº 10

A discussão sobre o número de raízes reais distintas de uma equação do 2º grau é comumente feita por meio do discriminante da equação. Para o caso da equação  $x^2 - px + q^2 = 0$ , ( $p > 0$ ,  $q > 0$ ), isso pode ser feito geometricamente, como mostra a figura.

Nela, o arco é uma semicircunferência de diâmetro  $AB$ , com  $\overline{AB} = p$  e  $\overline{CD} = \overline{EF} = q$ .

As raízes  $r$  e  $s$  da equação são representadas pelos segmentos  $AF$  e  $BF$ , respectivamente.

De fato,  $r + s = p$  e  $rs = q^2$ , uma vez que o triângulo  $AEB$  é retângulo e  $EF$  é a altura relativa à hipotenusa.



- A partir da construção acima, conclua qual é a relação entre  $r$  e  $s$ , no caso em que  $q = p/2$ .
- Calcule o valor do discriminante da equação para  $q = p/2$  e compare o que você concluiu com o observado em a).
- Um mesmo resultado foi analisado sob os pontos de vista geométrico e algébrico. Para um professor, quais as vantagens de adotar esse procedimento em sala de aula? **(valor: 20,0 pontos)**

**Conteúdos estabelecidos na questão:**  
Metodologia do ensino da Matemática.

#### Habilidades aferidas:

Capacidade de: Integrar vários campos da Matemática para elaborar modelos, resolver problemas e interpretar dados; e interpretação e representação gráfica.

#### Padrão de Resposta Esperado:

a) Quando  $q = p/2$ , que é o raio do círculo, o ponto  $F$  coincide com o centro do mesmo. Neste caso, ter-se-á  $r = s$ , ou seja, a equação terá duas raízes iguais.

b) O discriminante da equação é  $\Delta = p^2 - 4q^2$ . Quando  $q = p/2$ , tem-se  $q^2 = p^2/4 \Leftrightarrow \Delta = 0$ , o que indica a igualdade das raízes da equação, como observado em (a).  
c) O trabalho de um mesmo conteúdo nos quadros algébrico e geométrico permite ao aluno ter uma visão da matemática como um todo e favorece a atribuição de significado ao cálculo algébrico pelo mesmo, desenvolvendo os dois tipos de raciocínio: algébrico e geométrico.